

La construcción del pensamiento matemático en educación infantil

Inmaculada Pérez Serrano
Manuel Alcalde Esteban
Gil Lorenzo Valentín

La construcción del pensamiento matemático en educación infantil

Inmaculada Pérez Serrano
Manuel Alcalde Esteban
Gil Lorenzo Valentín



UNIVERSITAT
JAUME I

DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ

■ Codi d'assignatura MI1017

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
<http://www.tenda.uji.es> e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia 119 - <http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia119>
Col·lecció Sapientia 123 - <http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia123>
www.sapientia.uji.es
Primera edició, 2017

ISBN: 978-84-16546-18-3



Publicacions de la Universitat Jaume I és una editorial membre de l'UNE, cosa que en garanteix la difusió de les obres en els àmbits nacional i internacional. www.une.es



Reconeixement-CompartirIgual
CC BY-SA

Aquest text està subjecte a una llicència Reconeixement-CompartirIgual de Creative Commons, que permet copiar, distribuir i comunicar públicament l'obra sempre que s'especifique l'autoria i el nom de la publicació fins i tot amb objectius comercials i també permet crear obres derivades, sempre que siguin distribuïdes amb aquesta mateixa llicència.

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode>

Aquest llibre, de contingut científic, ha estat avaluat per persones expertes externes a la Universitat Jaume I, mitjançant el mètode denominat revisió per iguals, doble cec.

ÍNDICE

Introducción	7
Tema 1. Desarrollo de los conceptos lógicos	9
1. Introducción	9
1.1. Histórica	9
1.2. Al tema	10
2. Formalización de los conceptos de la Teoría de Conjuntos	11
2.1. Introducción	11
2.2. Conjuntos	12
2.2.1. Definiciones y conceptos básicos	12
2.2.2. Operaciones entre conjuntos	13
2.3. Correspondencias	16
2.4. Relaciones binarias	18
3. Los conceptos lógicos en el aula de infantil	20
3.1. Consideraciones previas	20
3.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil	20
3.3. Desarrollo de las capacidades	21
Tema 2. Los números naturales en educación infantil	53
1. Introducción	53
1.1. Reflexión sobre el concepto de número natural	53
1.2. Contextos y usos del número natural	57
2. Formalización del conjunto de los números naturales	57
2.1. Definición de número natural	57
2.2. Operaciones en N	59
2.3. Orden en N	59
3. Sistemas de numeración	61
3.1. Evolución histórica	61
3.2. Definición y tipos	66
3.2.1. Sistemas de numeración aditivos	67
3.2.2. Sistemas de numeración posicionales	68
4. Los números naturales en el aula de infantil	72
4.1. Consideraciones previas	72
4.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil	73
4.3. Desarrollo de las capacidades	74

Tema 3. Cálculo operacional en educación infantil	87
1. Introducción	87
1.1. Reflexión general sobre las operaciones en la escuela	87
2. El cálculo operacional en el aula de infantil	89
2.1. Consideraciones previas	89
2.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil	90
2.3. Desarrollo de las capacidades	90
 Tema 4. Iniciación a la medida	97
1. Introducción	97
1.1. Histórica	97
2. Formalización de los conceptos de magnitud y medida	102
2.1. Concepto de magnitud	102
2.2. Medida de una magnitud	103
2.3. Unidad de medida	104
3. La iniciación a la medida en el aula de infantil	104
3.1. Consideraciones previas	104
3.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil	105
3.3. Desarrollo de las capacidades	106
 Tema 5. Primeras nociones espaciales y geométricas	125
1. Introducción	125
1.1. Histórica	125
1.2. Al tema	127
2. Los primeros pasos por la geometría	128
2.1. Preliminares	128
2.2. Geometrías	129
2.3. Referentes psicoevolutivos	132
3. Introducción teórica	133
3.1. Líneas en el plano	133
3.1.1. Antecedentes: plano, puntos y vectores	133
3.1.2. La recta	135
3.1.3. La circunferencia	137
3.2. Superficies en el plano	138
3.2.1. Ángulos	139
3.2.2. Polígonos	140
3.2.2.1. Triángulos	141
3.2.2.2. Cuadriláteros	144
3.2.2.3. Pentágonos	147
3.2.2.4. Hexágonos	148
3.2.3. Consideraciones sobre los polígonos	149
3.2.3.1. Mosaicos	149
3.2.3.2. Polígonos regulares: simetrías	151
3.2.4. Círculo	152
3.3. Figuras en el espacio	153
3.3.1. Ángulos en el espacio	154
3.3.2. Cuerpos geométricos	155

3.3.2.1. Poliedros.....	156
3.3.2.2. Cuerpos redondos.....	163
3.4. Transformaciones geométricas en el plano	168
3.4.1. Movimientos rígidos o isometrías	168
3.4.1.1. Translaciones.....	168
3.4.1.2. Giros o rotaciones	169
3.4.1.3. Simetrías axiales.....	170
3.4.1.4. Composición de movimientos en el plano	171
3.4.2. Transformaciones equiformes.....	172
3.4.2.1. Proporcionalidad de segmentos.....	172
3.4.2.2. Teorema de Tales.....	172
3.4.2.3. Homotecias.....	173
3.4.2.4. Semejanzas	174
3.5. Transformaciones geométricas en el espacio	174
3.5.1. Simetría especular	175
4. La iniciación a la geometría en el aula de infantil	175
4.1. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil	175
4.2. Desarrollo de las capacidades	176
Referencias bibliográficas.....	207
Bibliografía recomendada	207
Índice de figuras.....	209

Introducción

Presentamos en este documento un material para la formación inicial y permanente del profesorado de educación infantil, en el que se muestran propuestas didácticas para trabajar los contenidos matemáticos en esta etapa educativa, que se concretan en conceptos lógicos, iniciación a los números naturales y a las operaciones de adición y sustracción, primeras experiencias de medida y relaciones con el espacio y la geometría.

Aunque los contenidos mencionados están trabajados en publicaciones de otros autores, en esta pretendemos ofrecerlos a nuestros lectores en un texto estructurado alrededor de las capacidades matemáticas que deben trabajarse con el alumnado de educación infantil.

Cada uno de los temas cuenta con una introducción que nos permite reflexionar respecto de dos cuestiones que consideramos importantes. Una es la evolución histórica de los contenidos correspondientes y la otra es el aspecto teórico de estos conceptos, que se expone para recordarlos y acercarlos al lector.

A continuación, como parte más importante del texto y como núcleo que justifica esta publicación, se incluye en cada tema un extenso apartado referente al tratamiento didáctico de los contenidos de educación infantil para trabajarlos en el aula y conseguir, de esta manera, el desarrollo del pensamiento lógico-matemático del alumnado. Los mencionados contenidos se ajustan al currículum establecido en la legislación vigente para esta etapa educativa.

En el apartado didáctico se presentan los contenidos mencionados a partir de la realidad y para ser aplicados en ella. Como consecuencia y otorgándole la importancia máxima a esta cuestión, todas las situaciones que se enuncian acompañando a los aspectos didácticos del texto forman parte de otras más complejas que se trabajan en el aula, para cuya interpretación y resolución son esenciales los conceptos matemáticos. A veces las actividades matemáticas surgirán del desarrollo de algunos proyectos de trabajo globalizados, en otras ocasiones se plantearán a partir de necesidades que generan las diferentes áreas del currículum. Solo cuando se detecten algunos contenidos que no hayan aparecido en ninguna actividad como las mencionadas, el docente favorecerá de manera intencionada la aparición de situaciones que provoquen las incógnitas que los lleven a su descubrimiento.

En todos los casos, se debe partir de las ideas previas del alumnado sobre cada uno de los conceptos a trabajar y, en particular, de sus propuestas personales para resolver las diferentes situaciones que se planteen. En algunos momentos nos acercaremos a los procedimientos generales de conceptualización como forma de iniciarlos en el descubrimiento y la construcción de las herramientas matemáticas que socialmente se utilizan en las situaciones en las que intervienen.

Atendiendo a las recomendaciones del Parlamento Europeo y del Consejo de Europa sobre las competencias clave para el autoaprendizaje permanente, entendemos que la competencia matemática solo se concreta y cobra sentido en la medida en que los elementos y razonamientos matemáticos que se estudian son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los necesiten. Por eso, su desarrollo en el colegio se conseguirá partiendo de una amplia variedad de actividades reales, derivadas de otros campos del conocimiento, de las situaciones habituales que se dan en el aula y de las propias experiencias y vivencias del alumnado. En la etapa de educación infantil se trata de conseguir que los niños y las niñas se inicien en la aplicación de las destrezas y actitudes que les permitan, en las etapas educativas posteriores, razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse con lenguaje matemático para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de diferente nivel de complejidad (Alsina, 2004; 2011a, b).

El objetivo de este material es proporcionar una herramienta para los profesionales de la docencia y para el estudiantado del Grado en Maestro/a, que les ayude a reflexionar sobre los fenómenos educativos que ocurren en el aula escolar y les permita enfrentarse a ellos desde un planteamiento que considera la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como una tarea interdisciplinar y globalizadora, que parte de una concepción sociocultural de la educación en general y de la educación matemática en particular (Vygotsky, 1989; Bishop, 1999). Así mismo desarrollaremos su contenido tomando como marco de las características psicológicas de los niños y niñas los cuatro estadios del desarrollo cognitivo de las personas que establece en sus estudios Jean Piaget (Piaget e Inhelder, 1984).

Respecto a los y las estudiantes del Grado en Maestro/a de Educación Infantil de la Universitat Jaume I, este documento representa un material complementario para las clases presenciales, en las cuales se profundiza en el texto relacionando la fundamentación matemática de los conceptos con su didáctica, mediante la realización de diferentes actividades que se desarrollan a lo largo del curso académico. Presuponemos que, en las aulas de infantil donde se trabajan los contenidos de este documento, se encuentran los materiales didácticos estructurados que describiremos más adelante u otros parecidos ideados y fabricados por los docentes y/o el alumnado, que tendrán que compartir en su esencia aquello que es fundamental para la construcción de los contenidos matemáticos que se desarrollan en esta publicación. Los materiales mencionados constituyen un soporte imprescindible para el trabajo en el aula relativo a los conceptos estudiados.

El presente documento no agota las actividades que los maestros y las maestras de educación infantil deben realizar en las aulas. La gran variedad de posibles dispositivos didácticos que pueden ofrecer a los niños y las niñas es imposible reflejarla en cualquier publicación. Nuestro interés es poner la atención en lo que deben trabajar para fundamentar matemáticamente los procedimientos empleados por el alumnado y dar indicaciones de cómo tienen que hacerlo. Nunca agotaremos la creatividad didáctica que un docente debe tener en su tarea diaria.

Desarrollo de los conceptos lógicos

1. Introducción

Por medio de la formación de conjuntos y la clasificación y ordenación de elementos, en este tema pretendemos ofrecer a los niños y las niñas las herramientas matemáticas que les ayuden a responder las preguntas que la realidad les plantea respecto a «¿cómo son los objetos?, ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?, ¿cómo se relacionan?».

Se inicia con una aproximación al significado de la lógica en la historia, continúa con la formalización de algunos conceptos de la Teoría de Conjuntos y finaliza con un extenso tratamiento didáctico sobre cómo trabajar los conceptos lógicos en el aula de infantil.

1.1. Histórica

Una primera definición de lógica podría enunciarse como «la disciplina que trata de los métodos de razonamiento, es decir, que ofrece reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido».

A grandes rasgos, la historia de la lógica se divide en tres etapas: la lógica griega, la lógica escolástica y la lógica matemática.

El primer estudio sistemático del razonamiento lógico se encuentra en la obra de Aristóteles (384-322 a. C.). La lógica aristotélica enuncia las fórmulas con palabras del lenguaje cotidiano.

Durante la segunda etapa, la lógica se abstraía del lenguaje y se caracterizaba por unas reglas sintácticas diferenciadas y unas funciones semánticas especiales.

En estas dos etapas los teoremas lógicos se derivaban del lenguaje usual.

En la tercera etapa, la lógica queda marcada por el uso de un lenguaje artificial en el que los signos y las palabras se rigen por una sintaxis exacta y tienen una función estrechamente delimitada y definida. En este caso, en primer lugar se construye un sistema puramente formal y solo más tarde se busca una interpretación en el lenguaje cotidiano. Fue Leibniz (1646-1716) el precursor de esta manera de usar la lógica.

El nacimiento de la lógica contemporánea se sitúa entre los años 1847, cuando De Morgan publica su libro *Formal Logic*, y 1854 cuando se publica el primer libro de Boole que lleva por título *Investigación sobre las leyes del pensamiento*, en el que se construye y se desarrolla la lógica formal como un nuevo tipo de álgebra que suministra un algoritmo fácil para el razonamiento silogístico. Después de la muerte de Boole y hasta la publicación entre 1910 y 1913 de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, el interés por la lógica fue mínimo. En esta última obra se intenta poner de manifiesto que toda la matemática pura se puede deducir de una pequeña cantidad de principios lógicos fundamentales (axiomas).

Kurt Gödel, en su teorema de incompletitud, demostró en 1931 que esto no es posible porque en un sistema formulado de manera estrictamente lógica hay siempre proposiciones indecidibles a partir de los axiomas del sistema. Establece, además, que la aritmética básica no puede demostrar su propia consistencia y, por tanto, es imposible demostrarla respecto de cualquier sistema matemático más complejo. Este teorema está considerado como el resultado más importante de la lógica matemática.

1.2. Al tema

Como se ha mencionado en el punto anterior, la lógica se puede considerar como la disciplina filosófica que estudia las formas o estructuras del pensamiento. También es el área de la filosofía que estudia los razonamientos y las condiciones según las cuales estos serán correctos y verdaderos.

Se entiende por razonamiento la operación mental mediante la que se obtiene la comprensión teórica de la realidad, la formación de conceptos y la indagación sobre su naturaleza.

Con estas definiciones iniciales ya se puede intuir que la introducción, el desarrollo y el estudio de conceptos lógicos están justificados en el aula de infantil, dado que pensar es determinar relaciones entre conceptos y cuando pensamos estamos formando juicios entre dos o más de aquellos.

Si se pudiera establecer un orden de acceso al pensamiento, una primera operación mental lógica sería la llamada aprehensión, que consiste en enfrentarse a un objeto determinado para obtener como resultado la elaboración de un concepto o una idea. Una segunda operación mental lógica es el juicio, en el cual la inteligencia afirma o desmiente la existencia de una relación entre dos naturalezas, esencias o conceptos. Como tercera operación mental lógica estaría el raciocinio, en el que se agrupan, se ligan y se vinculan los conceptos por la razón según unas reglas o leyes determinadas.

La lógica está presente en cualquier nivel de pensamiento existente, desde el más cotidiano hasta el más elevado del ser humano, un ejemplo del cual podría ser el método científico.

2. Formalización de los conceptos de la Teoría de Conjuntos

La Teoría de Conjuntos es la encargada de simbolizar el lenguaje matemático. Por ello formando conjuntos expresamos los conceptos que componen el currículum escolar y favorecemos su aprendizaje.

Presentamos a continuación una breve formalización de algunos conceptos de la Teoría de Conjuntos, necesarios para trabajar los contenidos de este tema y también de los posteriores de la presente publicación.

2.1. Introducción

El concepto de conjunto es intuitivo y no se puede definir con rigor. Se podría entender como «una agrupación de elementos hecha con cualquier criterio». El criterio puede no ser una propiedad característica común, sino simplemente el deseo o la necesidad de agrupar ciertos objetos o elementos para formar un conjunto. Así, podemos hablar de un conjunto de personas, de frutas, de cuentos, o del conjunto de objetos que hay en un momento determinado dentro de un cajón. Un conjunto está bien determinado si se sabe si un elemento dado pertenece o no al conjunto; así, el conjunto de los bolígrafos azules está bien determinado, porque al ver un bolígrafo podemos saber si es azul o no. El conjunto de las personas altas no está bien determinado en tanto en cuanto no se establezca o defina de forma unívoca qué es ser alto, porque al ver una persona, no siempre se podrá decir si es alta o no, o puede haber diferentes personas que opinen distinto sobre su altura.

Los conjuntos se representan, normalmente, por una letra mayúscula: A , B , K ...

Llamaremos elemento a cada uno de los objetos que forman parte de un conjunto. Estos elementos tienen carácter individual, tienen cualidades que nos permiten diferenciarlos y cada uno es único, de manera que no hay elementos duplicados o repetidos. Los representaremos con una letra minúscula: a , b , k ... Cuando un elemento a forma parte de un conjunto A , diremos que pertenece a ese conjunto y lo expresaremos como $a \in A$.

Se define cardinal de un conjunto como «la cantidad de elementos que hay en el conjunto».

Se llama conjunto universal o referencial, que habitualmente representaremos por la letra U , al conjunto de todos los elementos de los cuales se esté tratando en una determinada situación; así, si hablamos de mamíferos, U es el conjunto de todos los animales mamíferos; si hablamos de ciudades, U es el conjunto de todas las ciudades. Este conjunto universal o referencial puede mencionarse explícitamente o, en la mayoría de los casos, se da por conocido atendiendo al contexto que se esté trabajando.

Siempre ha sido muy utilizada la idea de conjunto a lo largo de la historia, en cualquier representación o explicación matemática, pero no será hasta el siglo XIX cuando se le otorgará rigor.

En este siglo, Cantor pone las bases para la construcción de la Teoría de Conjuntos: definiciones, introducción a cardinales, conjunto bien ordenado... Inicialmente se plantearon algunos problemas lógicos relacionados con esta teoría, que se resolvieron mediante la elaboración de sistemas axiomáticos (son conjuntos de afirmaciones admitidas como verdaderas sin necesidad de demostración) como los de Zermelo-Frenkel, los de Newman..., que la fundamentan adecuadamente.

2.2. Conjuntos

En este apartado se hace un recorrido por algunos conceptos (operaciones, relaciones...) de la Teoría de Conjuntos que resultan fundamentales para que los niños y las niñas de educación infantil puedan construir sus conocimientos matemáticos.

2.2.1. Definiciones y conceptos básicos

Como se ha comentado en el punto anterior, se admite la idea de conjunto como la agrupación en un todo de determinados objetos (no necesariamente físicos) bien definidos y diferenciados unos de otros. A partir de esta idea, introduciremos a continuación los siguientes conceptos esenciales:

- Determinaciones de un conjunto:
 - Por comprensión: explicitando la propiedad característica de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de vocales del alfabeto español: $V = \{\text{vocales del alfabeto español}\}$.
 - Por extensión: enumerando, uno por uno, todos los elementos que lo componen. Por ejemplo, el conjunto formado por las letras a, e, i, o, u: $V = \{a, e, i, o, u\}$.
- Representaciones de un conjunto:
 - Representación gráfica: diagrama lineal, diagrama de Venn (línea curva cerrada que delimita los elementos del conjunto) u otro diagrama formado por cualquier línea cerrada.

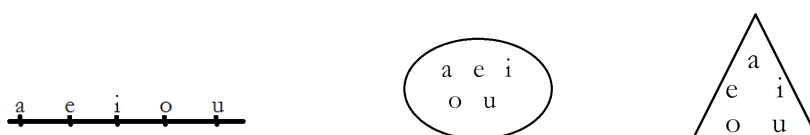


Figura 1. Representación de conjuntos: diagrama lineal (izquierda), de Venn (centro) y otro de línea cerrada (derecha)

- Representación simbólica: como se ha mencionado antes, se utilizarán letras minúsculas para representar los elementos de un conjunto y mayúsculas para representar los conjuntos.
- Conjuntos iguales: aquellos que tienen los mismos elementos. Por ejemplo, el conjunto formado por las vocales de la palabra «maravillosa» y el que tiene como elementos las vocales de «cosita»: $M = \{a, i, o\} = \{o, i, a\} = C$.
- Subconjuntos: un conjunto A es subconjunto de otro X si y solo si cualquier elemento de A es también elemento de X. Que se expresa formalmente por: $A \subset X \Leftrightarrow [\forall a \in A \rightarrow a \in X]$. Por ejemplo, si X es el conjunto de todos los mamíferos y A es el de los felinos, está claro que A es un subconjunto de X, ya que todos los felinos son mamíferos.
- Conjunto universal o referencial: como ya se ha comentado anteriormente, es el conjunto de todos los elementos de los cuales se esté tratando en un determinado momento o situación y se nombra con la letra U.
- Conjunto complementario de un subconjunto: sea A un subconjunto de X. Definimos complementario de A respecto a X como el conjunto de los elementos de X que no pertenecen a A. Formalmente: $A \subset X : A_X^c = \{x \in X / x \notin A\}$. Por ejemplo, si X es el conjunto de muebles de una casa y A es el de las sillas, el complementario de A respecto a X es el conjunto de muebles que no son sillas (mesas, camas, consolas, armarios...).
- Conjunto vacío: \emptyset , el que no tiene ningún elemento.

2.2.2. Operaciones entre conjuntos

- Unión: sean A y B dos conjuntos. El conjunto unión de A y B está formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B. La representación formal es: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$. Por ejemplo, si A es un conjunto de bolas de madera para hacer un collar y B es uno de bolas rojas, $A \cup B$ será el conjunto de bolas que sean de madera o rojas, como se ve en la figura 2.

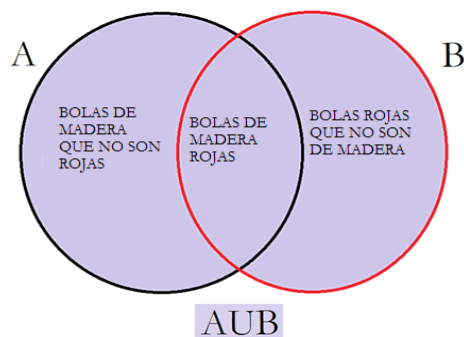


Figura 2. Representación de la unión de los conjuntos A y B

Si los conjuntos no tienen elementos en común, por ejemplo, C es un conjunto de bolas de color azul y B sigue siendo uno de bolas rojas, $C \cup B$ será el conjunto de bolas que sean azules o rojas. La representación gráfica será ahora la que aparece en la figura 3.

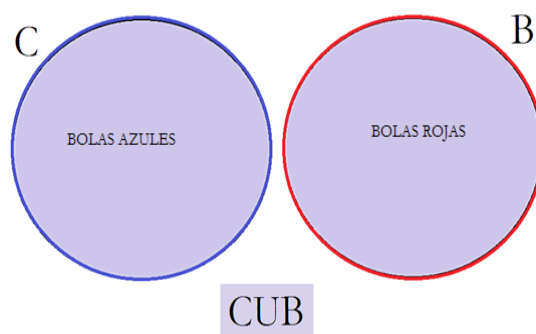


Figura 3. Representación de la unión de los conjuntos C y B

- **Intersección:** sean A y B dos conjuntos. El conjunto intersección de A y B está formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B. Expresado formalmente: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$. Por ejemplo, si A y B son los conjuntos de los ejemplos anteriores, $A \cap B$ será el conjunto de bolas que sean de madera y de color rojo. La representación se puede observar en la figura 4.

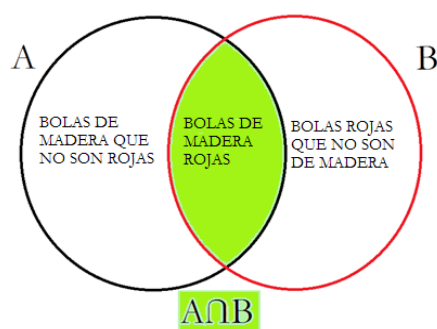


Figura 4. Representación de la intersección de los conjuntos A y B

Si los conjuntos no tienen elementos en común, su intersección es el conjunto vacío y se llaman conjuntos disjuntos. Por ejemplo, si queremos obtener la intersección de los conjuntos C y B anteriores, observamos que $C \cap B = \emptyset$ y por tanto no se podría colorear ninguna zona común en la representación gráfica.

Algunas propiedades de la unión y la intersección:

1. *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
2. *Asociativa:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. *Distributiva:*
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup A^c = U$ y $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cap A^c = \emptyset$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$

- Partición de un conjunto: sea A un conjunto y A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de A . Diremos que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una partición de A , si y solo si (en adelante sii):
 - Todos los A_i son subconjuntos no vacíos de A : $A_i \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, n$
 - La unión de todos los subconjuntos A_i es el conjunto A : $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$
 - Los subconjuntos A_i son disjuntos dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Para poner un ejemplo, utilizaremos los bloques lógicos de Dienes (figura 5) compuestos por 48 piezas de madera o plástico organizadas alrededor de cuatro características (color, forma, tamaño y grosor) que se distribuyen en función de tres valores para el color (rojo, amarillo y azul), cuatro para la forma (círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo), dos para el tamaño (grande y pequeño) y dos para el grosor (grueso y delgado) (Kothe, 1982; Santos, 1992).

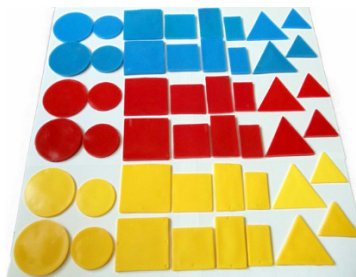


Figura 5. Imagen de los bloques lógicos de Dienes

Así, si A es el conjunto de las 48 piezas de los bloques lógicos de Dienes y consideramos como A_1 el de las piezas grandes y como A_2 el de las pequeñas, se puede comprobar fácilmente que $\{A_1, A_2\}$ es una partición de A . Mientras que si B_1 son las piezas rojas, B_2 las circulares y B_3 las gruesas, $\{B_1, B_2, B_3\}$ no es una partición de A porque no se cumplen la segunda y la tercera condiciones.

- Producto cartesiano: se define el producto cartesiano de los conjuntos A y B como el conjunto formado por los pares ordenados que tienen como primera componente un elemento de A y como segunda uno de B :

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{\text{paella, sopa, macarrones}\}$ es el conjunto de primeros platos de un menú y $B = \{\text{carne, pescado}\}$ es el de segundos platos, el producto cartesiano será el conjunto de todas las posibles combinaciones que se pueden obtener seleccionando un primer y un segundo plato, es decir, $A \times B = \{(\text{paella, carne}), (\text{sopa, carne}), (\text{macarrones, carne}), (\text{paella, pescado}), (\text{sopa, pescado}), (\text{macarrones, pescado})\}$.

Algunas propiedades del producto cartesiano:

1. $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$
2. $A \times B \neq B \times A$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2.3. Correspondencias

Una correspondencia, f , entre dos conjuntos A y B es cualquier criterio que nos permite asociar elementos de A con elementos de B . A se llama conjunto inicial y B conjunto final.

Los elementos de A a los que les corresponde algún elemento de B son los elementos origen y los de B que se asocian con alguno de A son los elementos imagen. Formalmente, una correspondencia f es una terna $(A, B, G(f))$, donde:

- A, B son conjuntos y $f : A \rightarrow B$ asocia elementos de A con elementos de B . Cuando dos elementos, $x \in A$ e $y \in B$, están asociados por medio de esta correspondencia, lo expresamos como $f(x) = y$.
- $D(f) = \{x \in A / \exists y \in B : f(x) = y\}$ es el conjunto dominio de la correspondencia y está formado por los elementos de origen.
- $Im(f) = \{y \in B / \exists x \in A : f(x) = y\}$ es el conjunto imagen de la correspondencia y está formado por los elementos imagen.
- $G(f) \subset A \times B$, se llama grafo de la correspondencia y está formado por los pares (x, y) donde x es un elemento origen e y es su correspondiente imagen:
 $G(f) = \{(x, y) \in A \times B / x \in D(f), y \in Im(f) \wedge y = f(x)\}$.

Cualquier correspondencia nos permite definir su correspondencia recíproca o inversa, de la siguiente manera: $f^{-1} : B \rightarrow A / D(f^{-1}) = Im(f)$ y $Im(f^{-1}) = D(f)$. Es decir, la correspondencia inversa asocia los elementos de B con sus correspondientes en A y convierte los elementos origen en imágenes y viceversa. Así, si $x \in A, y \in B$ y $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$.

Algunas correspondencias pueden ser:

- Unívoca: a cada elemento de A le corresponde un elemento o ninguno de B . Por ejemplo, si $A = \{\text{Elena, Irene, Ángela, Adela}\}$ y $B = \{b, i, r, l, a\}$, establecemos entre ellos la correspondencia que asocia cada nombre de A con su letra inicial en B . Como se puede comprobar en la figura 6, esta correspondencia es unívoca.

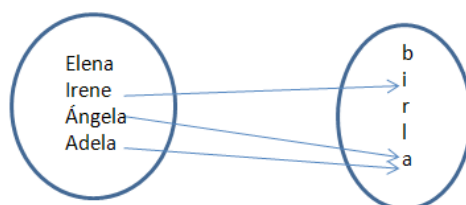


Figura 6. Representación de una correspondencia unívoca

- Biunívoca: tanto f , como f^{-1} , son unívocas. Es decir, a cada elemento de A le corresponde uno o ninguno de B y a cada elemento de B le corresponde uno

o ninguno de A . Si ahora $A = \{\text{Elena, Irene, \u00c1ngela, Jorge}\}$ y $B = \{\text{b, i, r, l, a}\}$ y asociamos elementos con el mismo criterio anterior, podemos ver en la figura 7 que la correspondencia es biun\u00edvoca.

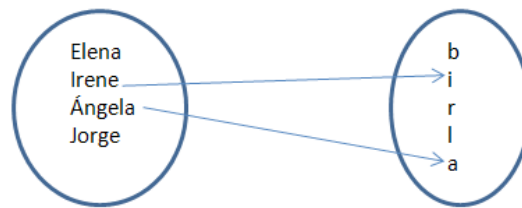


Figura 7. Representaci\u00f3n de una correspondencia biun\u00edvoca

- **Aplicaci\u00f3n:** todo elemento de A tiene imagen en B y esta es \u00fanica. Es decir, $\forall a \in A, \exists ! b \in B / f(a) = b$. Vemos en este caso un ejemplo con $A = \{\text{Elena, Irene, \u00c1ngela, Adela}\}$ y $B = \{\text{a, e, i, o, u}\}$. Si asociamos elementos de ambos conjuntos con el mismo criterio de las correspondencias anteriores, en la figura 8 observamos que hemos definido una aplicaci\u00f3n.

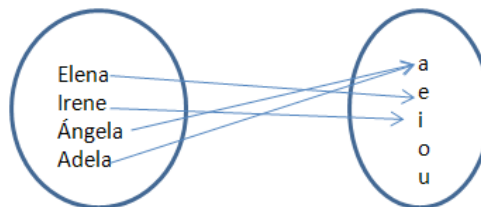


Figura 8. Representaci\u00f3n de una aplicaci\u00f3n

- **Biyectiva:** todo elemento de A tiene una \u00fanica imagen en B y todo elemento de B tiene un \u00fanico origen en A , o dicho de otra forma, tanto f como f^{-1} son aplicaciones. En este caso mostramos el ejemplo con $A = \{\text{Elena, Irene, \u00c1ngela, \u00darsula, Odet}\}$ y $B = \{\text{a, e, i, o, u}\}$. Si asociamos elementos con el criterio anterior, en la figura 9 podemos observar una aplicaci\u00f3n biyectiva.

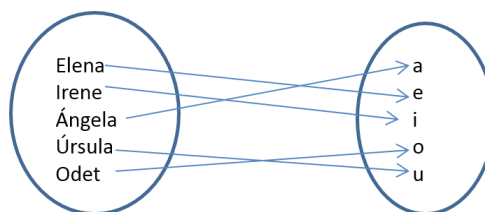


Figura 9. Representaci\u00f3n de una aplicaci\u00f3n biyectiva

- **Composici\u00f3n de aplicaciones:** dada una aplicaci\u00f3n $f: A \rightarrow B$, y otra $g: B \rightarrow C$ de forma que $\forall a \in A \ f(a) = b \wedge \forall b \in B \ g(b) = c$, se define la composici\u00f3n de aplicaciones como otra aplicaci\u00f3n $g \circ f: A \rightarrow C$, que cumple $\forall a \in A \ g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Si las aplicaciones f y g son biyectivas, su composici\u00f3n $g \circ f$ tambi\u00e9n lo es.

2.4. Relaciones binarias

Una relación binaria es una asociación o conexión que se establece entre pares de elementos de un conjunto. Puede haber muchas definidas en un mismo conjunto. Analíticamente, podemos decir que la relación R es una terna $(A, A, G(R))$, donde $G(R) \subset A \times A$, como ocurre en el punto anterior, entonces diremos que xRy si (x,y) pertenece a $G(R)$.

Las propiedades que pueden cumplir las relaciones binarias son $\forall x, y, z \in A$:

1. *Reflexiva*: xRx . Todo elemento está relacionado consigo mismo. Por ejemplo, la relación «practicar el mismo deporte» definida en un conjunto de personas cumple la propiedad reflexiva.
2. *Antirreflexiva*: $x\bar{R}x$. Cualquier elemento no se relaciona consigo mismo. Por ejemplo, «ser padre de» es una relación antirreflexiva.
3. *Simétrica*: $xRy \rightarrow yRx$. Si un elemento se relaciona con otro, entonces el segundo se relaciona con el primero. Por ejemplo, la relación «practicar el mismo deporte» cumple la propiedad simétrica.
4. *Antisimétrica*: $xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$ o bien, $x \neq y \wedge xRy \rightarrow y\bar{R}x$. Si un elemento está relacionado con otro y este lo está con el primero, necesariamente han de ser el mismo elemento (si partimos de dos elementos diferentes y el primero se relaciona con el segundo, entonces el segundo no está relacionado con el primero). Por ejemplo, «tener más edad que» es una relación antisimétrica.
5. *Transitiva*: $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$. Si un primer elemento se relaciona con un segundo y a la vez este está relacionado con un tercero, entonces el primero lo está también con el tercero. Por ejemplo, la relación «ser de la misma edad» cumple la propiedad transitiva.
6. *Conexa*: $xRy \wedge yRx$. Si tomamos dos elementos cualesquiera se cumple que el primero está relacionado con el segundo o viceversa. Por ejemplo, la relación «ser menor o igual» definida en el conjunto de los números naturales es conexa.

Una relación binaria definida en un conjunto es *relación binaria de equivalencia* (RBE) si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En el conjunto en el que está definida esta relación se produce una clasificación de sus elementos, que se organizan en subconjuntos, llamados clases de equivalencia, formados por los elementos que están relacionados entre sí, es decir, que son equivalentes respecto de esta relación. El conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia se llama conjunto cociente.

Por ejemplo, en el conjunto $A = \{\text{estudiantes del Grado en Maestro/a de la UJI}\}$ definimos la relación binaria $aRb \Leftrightarrow a$ y b nacieron en la misma población. Vamos a comprobar si es de equivalencia:

- Reflexiva: cualquier elemento de A está relacionado consigo mismo puesto que cada estudiante ha nacido en el mismo pueblo que él/ella (aRa).
- Simétrica: si un estudiante nació en la misma población que otro, el segundo también nació en el mismo pueblo que el primero ($aRb \rightarrow bRa$).
- Transitiva: si un estudiante nació en la misma población que otro y este en la misma que un tercero, el primero nació en el mismo pueblo que el tercero ($aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$).

Por cumplir estas tres propiedades, la relación «nacer en la misma población» es una relación binaria de equivalencia, que agrupa a los y las estudiantes en clases de equivalencia formadas por los estudiantes del mismo pueblo, como por ejemplo, $A_1 = \{\text{estudiantes de Maestro/a de la UJI nacidos en Castellón}\}$, $A_2 = \{\text{estudiantes de Maestro/a de la UJI nacidos en Vila-real}\}$, $A_3 = \{\text{estudiantes de Maestro/a de la UJI nacidos en Benicàssim}\}$... Estas clases, que son subconjuntos de A , generan una partición de este conjunto y son los elementos del conjunto cociente A/R :

$A/R = \{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{\{\text{estudiantes de Maestro/a de la UJI nacidos en Castellón}\}, \{\text{estudiantes de Maestro/a de la UJI nacidos en Vila-real}\}, \{\text{estudiantes de Maestro/a de la UJI nacidos en Benicàssim}\}, \dots\}$.

Una relación binaria definida en un conjunto es *relación binaria de orden* (RBO) si cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva (también se llama *de orden amplio*). Por ejemplo, en el conjunto $A = \{\text{estudiantes del Grado en Maestro/a de la UJI seleccionados de manera que no hay dos personas con la misma edad}\}$ definimos la relación binaria $aRb \leftrightarrow a$ tiene menor o igual edad que b . Vamos a comprobar si es de orden:

- Reflexiva: cualquier elemento de A está relacionado consigo mismo puesto que cada estudiante tiene la misma edad que él/ella (aRa).
- Antisimétrica: si consideramos dos estudiantes diferentes y el primero tiene menor o igual edad que el segundo, está claro que el segundo no puede tener menor o igual edad que el primero (teniendo en cuenta que en A no hay dos estudiantes con la misma edad) ($a \neq b \wedge aRb \rightarrow \overline{bRa}$).
- Transitiva: si un estudiante tiene menor o igual edad que otro y este menor o igual que un tercero, el primero tiene menor o igual edad que el tercero ($aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$).

Por cumplir estas tres propiedades, la relación «tener menor o igual edad que» es una relación binaria de orden (amplio) en el conjunto A .

Si se cumpliera la antirreflexiva además de la antisimétrica y la transitiva, tendríamos una *relación binaria de orden estricto* (por ejemplo, «tener menor edad que» en un conjunto de personas cualesquiera). Si una relación binaria solo cumple las

propiedades reflexiva y transitiva se llama de *preorden* («ser múltiplo de» en el conjunto de los números enteros). Cualquier relación de orden definida anteriormente se llama de *orden parcial*, porque no se le ha exigido que cumpla la propiedad conexa. Si esta propiedad se cumple, las relaciones se llaman de *orden total*.

3. Los conceptos lógicos en el aula de infantil

3.1. Consideraciones previas

Para ayudarles a entender la realidad que les rodea, los niños y las niñas de educación infantil deben ir conociendo las características o cualidades de los objetos, así como sus valores (por ejemplo, la cualidad color puede tomar los valores rojo, verde, amarillo...) para poder formar conjuntos y establecer relaciones entre ellos. Es decir, tendrán que avanzar desde un conocimiento físico de los objetos hasta un conocimiento lógico-matemático de los mismos, que les permita agruparlos y relacionarlos en función de sus semejanzas y diferencias.

3.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil

El objetivo del tema será establecer los primeros pasos de este pensamiento lógico de una manera secuencial y adecuada a la educación infantil, que contribuirá a desarrollar en el alumnado las siguientes capacidades:

1. Captar las cualidades de los objetos a partir del contacto directo con ellos.
 - 1.1. Manipular y diferenciar materiales separados y continuos.
 - 1.2. Distinguir características sensoriales por medio de la vista.
 - 1.3. Distinguir características sensoriales por medio del tacto.
 - 1.4. Distinguir características sensoriales por medio del olfato.
 - 1.5. Distinguir características sensoriales por medio del gusto.
 - 1.6. Distinguir características sensoriales por medio del oído.
2. Describir diversas características que tiene un objeto.
3. Describir diversas características que no tiene un objeto.
4. Reconocer características de objetos representados en imágenes.
5. Identificar objetos determinados por varias de sus características.
6. Identificar diversos elementos que tienen una misma característica.
7. Formar conjuntos según características sensoriales de los objetos.
 - 7.1. Formar conjuntos determinados por una característica enunciada de forma afirmativa.
 - 7.2. Formar conjuntos determinados por una característica enunciada de forma negativa.
 - 7.3. Formar conjuntos determinados por una característica y observar el que determina la negación de esta.
 - 7.4. Formar conjuntos determinados por más de una característica común.
8. Enumerar los elementos que forman parte de un conjunto y reconocer algunos que no forman parte de él.

9. Identificar la propiedad característica que determina un conjunto.
10. Formar conjuntos a partir de elementos representados en imágenes.
11. Representar gráficamente los conjuntos formados.
12. Encontrar diferencias entre los elementos de un conjunto determinado por una característica y formar subconjuntos a partir de ellas.
13. Clasificar elementos por semejanzas cualitativas.
14. Completar series de elementos en las que vayan cambiando las características del material según un criterio dado.
15. Ordenar elementos según los matices de una de sus cualidades.
16. Establecer correspondencias cualitativas entre los elementos de dos conjuntos.
17. Representar gráficamente relaciones y asociaciones de elementos.

3.3. Desarrollo de las capacidades

En este apartado se recorren por orden creciente de dificultad los procedimientos para la construcción de los conceptos que se trabajan en el tema, desde el primer contacto que los niños y las niñas tienen con ellos en el aula, hasta el grado de adquisición de los mismos que se puede conseguir al finalizar esta etapa. La mayor parte del trabajo de estas capacidades se desarrollará a lo largo del 2.º ciclo de educación infantil (3-6 años), aunque algunas cuestiones muy sencillas se pueden tratar al final del 1.º ciclo (0-3 años).

En general, trabajaremos a partir de situaciones reales que se plantean y desarrollan en el aula y en el entorno, y tendremos que aprovechar las experiencias anteriores del alumnado para tomarlas como punto de partida en la construcción de los conceptos lógico-matemáticos correspondientes a esta etapa.

Los materiales didácticos específicos son una ayuda que siempre es necesario tener en el aula de educación infantil como complemento de las situaciones antes mencionadas. No solo porque es una edad en la que han de manipular, sino también porque su uso posibilita la creación de referentes gráficos e imágenes mentales a los que recurrir cuando se intenta dar cualquier paso hacia la abstracción.

Es necesario invertir tiempo para conocer las posibilidades que un material ofrece, pensar actividades para desarrollar las potencialidades de los niños y las niñas de educación infantil y, evidentemente, trabajar las capacidades que se estudian a continuación.

En particular, queremos prestar especial atención a los bloques lógicos de Dienes que se han descrito en el apartado 2.2.2, y a los que haremos referencia frecuentemente a lo largo de este tema, por considerarlos un material estructurado que integra muchas características de los objetos y que permite realizar una gran variedad de actividades relacionadas con el desarrollo del pensamiento lógico-matemático al que se refieren las capacidades del presente tema.

Iniciaremos el trabajo con este material al principio del segundo ciclo quitando las piezas rectangulares y eliminando todas las delgadas. Hacia la mitad del ciclo

incorporaremos los rectángulos gruesos y un poco más avanzado el segundo curso se trabajará también el grosor, utilizando las piezas delgadas y gruesas. Con este material se pretende alcanzar, entre otros, los siguientes dos objetivos:

1. Reconocer y diferenciar colores, formas, tamaños y grosores.
2. Formar conjuntos y clasificar en función de las características mencionadas.

Podemos encontrar comercializados otros materiales estructurados de características similares a los bloques lógicos de Dienes, cuya esencia coincide con estos, permitiéndonos trabajar objetivos semejantes y colaborando también en la construcción del conocimiento matemático del alumnado.

Se conseguirá dotar un aula de educación infantil con el material didáctico necesario, bien comprándolo en tiendas especializadas o bien construyéndolo el propio docente con la ayuda del alumnado y/o de los familiares.

1. Captar las cualidades de los objetos a partir del contacto directo con ellos

El desarrollo de este proceso debe estar ligado irremediablemente al hecho habitual de manipular los objetos de la realidad y de recibir la mayor cantidad posible de información a través de la percepción por los sentidos. Serán el tacto y la vista los primeros sentidos que discriminarán las características de los objetos, que se completarán con las que se pueden conocer gracias a los datos obtenidos con los otros tres.

La extensión de este trabajo aconseja fraccionarlo en apartados diferentes para cada uno de los sentidos, además de dedicar uno a la diferenciación inicial entre los dos tipos de materiales que pueden encontrar en la realidad: separados y continuos.

1.1. Manipular y diferenciar materiales separados y continuos

El trabajo en esta capacidad será diferente en función de los materiales que se estén utilizando. Debemos distinguir, pues, entre materiales separados y continuos.

Los primeros serían «todos aquellos que están compuestos por unidades singulares», es decir, unidades claramente diferenciables unas de otras, mientras que los segundos «no están compuestos por este tipo de unidades». Ejemplos del primer tipo podrían ser las naranjas de un frutero, los lápices de color de un estuche, los niños y las niñas del aula... Ejemplos clarificadores del segundo tipo son cualquier líquido, una cuerda, un trozo de tela...

En educación infantil se intentará que a través de la manipulación los niños y las niñas vayan experimentando, comparando y descubriendo, que hay materiales que se pueden manipular de uno en uno (los separados: pelotas, piedras, juguetes, bolitas...) y otros que no (los continuos: arena, agua, cuerda, harina...). Y todo esto

se hará por medio de actividades de meter y sacar, llenar y vaciar, transportar, ensartar..., en definitiva, actividades cotidianas que pueden hacer también fuera del aula. En todos los casos se adaptarán los materiales a las posibilidades manipulativas y motrices propias de cada edad.

El conocimiento de las diferencias entre estos dos tipos de materiales, prepara el camino hacia la construcción del concepto de cantidad. Así, si se trata de cuantificar los materiales separados habrá que realizar actividades de conteo con los números naturales y si se trata de cuantificar los materiales continuos se desarrollarán actividades de medida. Estas últimas son más complejas para el alumnado que las de conteo, porque su resultado es relativo y depende de la unidad elegida para medir.

En el trabajo referente a la cuantificación de los materiales, a veces algunos de los separados presentan dificultades para su conteo y se cuantifican midiéndolos. Les llamaremos áridos, y algunos ejemplos son los macarrones, el arroz, las lentejas... Aunque estos materiales no suelen contarse, los niños y las niñas pueden utilizarlos como separados en la realización de algunas actividades (un collar de macarrones, un dibujo rellenado con lentejas pegadas, etc.).

1.2. Distinguir características sensoriales por medio de la vista

En este apartado se trabajarán las siguientes cualidades de los objetos: tamaño, color, forma, longitud y grosor.

A. *Tamaño de los objetos.* Hacia el final del 1.^{er} ciclo hay que trabajar las diferencias entre grande y pequeño, utilizando objetos de tamaño muy contrastado y que sean lo más semejantes posible respecto a las otras características que los definan (de los mismos colores, material...), para evitar que sean estas las que centren la atención del alumnado (una pelota de pimpón y una de baloncesto en un proyecto sobre deportes, dos estanterías en una actividad de organización del aula, dos libros de la biblioteca de aula...).

Ya en el 2.^o ciclo, por ejemplo en la comparación de bocadillos o libros de cuentos, aparecerá un objeto más grande que el pequeño y más pequeño que el grande y que tenga un tamaño intermedio entre los dos anteriores. La confusión que crea la presencia de este objeto hace necesaria la búsqueda de un nombre que refleje esta situación. Es el momento de introducir la idea de mediano como el tamaño que se encuentra entre grande y pequeño.

Por medio de un procedimiento análogo y un poco más avanzado el ciclo, aumentaremos los diferentes valores de los tamaños de los objetos que se trabajan y tendremos que introducir en el lenguaje cotidiano palabras que maticen aquello que queremos decir respecto a esta cualidad, para concretarla y hacer la comunicación lo más exacta posible, por ejemplo, muy grande, muy pequeño, gigante, enano...

A medida que se van adquiriendo estos conocimientos, se pueden comparar los tamaños de objetos que no sean tan semejantes en las restantes características, para conseguir la generalización de los conceptos. Así, por ejemplo, observarán y contrastarán los diferentes tamaños de una canica, del recipiente de un yogur, de una caja de zapatos y de un armario del aula.

- B. *Color de los objetos.* Para trabajar los colores, en un principio, habrá que prestar atención individualmente a cada uno de ellos, procurando que en el aula haya más presencia de objetos de ese determinado color e introduciendo el vocabulario asociado. Por ejemplo, para el rojo se puede aprovechar algún proyecto sobre alimentos y llevar al aula tomates, fresas, ciruelas, sandía, etc., además de que los niños y las niñas vengán a clase con diferentes piezas de ropa de color rojo. En el momento en que conozcan más de un color, tendrán que contrastar objetos de estos colores para discriminarlos y verbalizarlos adecuadamente.

En el proceso de adquisición de los diferentes colores, es necesario que el alumnado los utilice para elaborar representaciones gráficas propias en las que aparezca un color o más de uno, usando pintura de dedos, lápices de colores, ceras o rotuladores, por ejemplo.

Una propuesta para iniciar el trabajo con los colores sería empezar con el rojo, el azul y el amarillo. Se podría continuar con el verde y el naranja, introduciendo posteriormente las mezclas de los colores conocidos además del blanco y el negro, así como los tonos claro y oscuro dentro de cada color.

- C. *Forma de los objetos.* Este trabajo es compartido con el de las capacidades a desarrollar dentro del tema 5 «Primeras nociones espaciales y geométricas», por este motivo no nos extenderemos ahora en la introducción geométrica de las figuras. No obstante, consideraremos la forma como una más de las cualidades que caracterizan a los objetos y que nos ayuda a describirlos y reconocerlos.

Para trabajar las figuras geométricas prestaremos atención en un principio a círculos, triángulos y cuadrados, procurando que en el aula haya más presencia de objetos en los que los encontremos en alguna de sus caras e introduciendo el vocabulario asociado (botes redondos para el círculo, cajas con alguna cara cuadrada para los cuadrados, envases de sándwich para los triángulos, por ejemplo, como se muestra en la figura 10). Cuando conozcan más de una forma, tendrán que contrastar objetos con estas formas para discriminarlas.



Figura 10. Imágenes de objetos para trabajar círculos, cuadrados y triángulos

Se profundiza en los conceptos geométricos correspondientes a estas figuras planas en el tema 5 de este volumen.

Hacia la mitad del 2.º ciclo y una vez estas figuras estén trabajadas, añadiremos los rectángulos a partir de muchos objetos cotidianos que tienen alguna cara rectangular (puertas, libros, folios, ventanas, pizarras, mesas, etc.).

En el proceso de adquisición de las diferentes formas, se hace necesario que los niños y las niñas utilicen diferentes materiales didácticos para visualizarlas y construirlas (figuras geométricas de plástico, bloques lógicos...).

Además, trabajaremos también gráficamente por medio de actividades de recortarlas, colorearlas y dibujarlas, utilizando inicialmente figuras modelo en caso de que las necesiten y sin modelo más adelante.

Introduciremos también otras formas que no se denominan geométricamente de ninguna manera especial, por ejemplo, forma de árbol, de casa, de pez, de luna creciente... Podemos trabajarlas con actividades de encajar en las que diferentes piezas tendrán que introducirse en huecos o siluetas que tiene la misma forma que ellas y nombrar estas formas (figura 11).

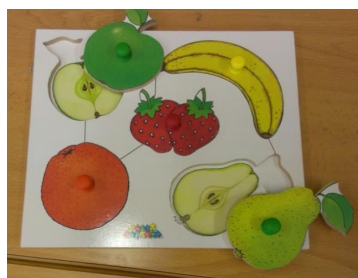


Figura 11. Imagen de un material didáctico de encajes

- D. *Longitud de los objetos.* Respecto de la magnitud longitud y teniendo en cuenta las diferentes direcciones en las que se puede considerar, trabajaremos el largo, el alto y el ancho de algunos objetos.

Desde el comienzo del 2.º ciclo hemos de trabajar los contrastes largo-corto y alto-bajo utilizando objetos de longitud y altura muy contrastada y que sean lo más semejantes posible respecto de las otras características que los determinan, para evitar que sean estas las que centren su atención (dos cuerdas para atar un paquete, dos torres hechas con bloques para representar los edificios de su pueblo, dos caminos marcados en el patio para hacer una carrera, dos árboles del patio...).

Más adelante introduciremos también la diferencia entre ancho y estrecho, con un procedimiento similar al anterior y utilizando objetos, lo más planos posible, para poder reconocer con claridad la dirección en la que observamos la anchura sin confundirla con la longitud (por ejemplo, un camino hecho con papel continuo y otro con papel higiénico).

Progresivamente se irá completando el vocabulario introduciendo modificadores para estas dimensiones: muy alto, muy corto, poco largo...

A medida que se van adquiriendo estos conocimientos, se pueden trabajar las comparaciones con objetos que no sean tan semejantes en las restantes características, para conseguir su generalización (una cuerda y un camino en la escenificación de un cuento; un árbol y una casa en un trabajo sobre las vacaciones; una toalla y una bañera en un proyecto sobre las viviendas familiares).

- E. *Grosor de los objetos*. Hacia el final de la etapa y trabajando con algunos objetos tridimensionales se asimilará esta característica, según los casos, a una de las dos dimensiones horizontales. Se estudiará el contraste grueso-delgado procurando no confundirlo con ancho-estrecho. Por ejemplo, en el caso del tronco de un árbol, diremos que es alto y grueso, no alto y ancho, como se ha mencionado antes en el caso de los caminos.

1.3. Distinguir características sensoriales por medio del tacto

En este apartado se trabajarán las siguientes cualidades de los objetos: textura, dureza, humedad, temperatura, tamaño, forma y grosor. También se dedicará atención a los materiales concretos con los que están fabricados los objetos.

- A. *Textura de los objetos*. Iniciaremos este trabajo estableciendo diferencias entre las sensaciones agradables y desagradables que sienten los niños y las niñas al recorrer con la mano las superficies de determinados objetos con texturas muy contrastadas. Por ejemplo, se puede aprovechar un proyecto sobre los oficios para llevar a clase un trozo de terciopelo y uno de lija, que utilizan las modistas y los carpinteros, introduciendo el vocabulario asociado, suave y áspero, respectivamente, para expresarlas.

Más adelante, además de percibir las anteriores texturas, experimentarán sensaciones diferentes de estas al tocar algunos objetos, por ejemplo, en un trabajo de clase relacionado con los alimentos, una manzana y un aguacate sin pelar. El vocabulario que se introducirá para nombrarlas será ahora liso y rugoso, respectivamente, para diferenciar las superficies que no presentan pliegues o irregularidades de las que sí.

Tendremos que buscar ejemplos que muestren las relaciones que se pueden establecer entre estas texturas. Así, encontraremos en diferentes situaciones que se trabajen en el aula, tejidos como por ejemplo la pana que es rugosa y suave a la vez, la superficie de un folio que es lisa y suave y un estropajo que es rugoso y áspero.

- B. *Dureza de los objetos*. En el contacto que el alumnado tiene con los objetos, además de percibir las texturas de sus superficies también puede apreciar la resistencia que estos presentan a ser deformados cuando se ejerce una fuerza sobre ellos. Así, por ejemplo, en una situación de elaboración de un regalo

para algún familiar, en la que han de pintar una piedra o un trozo de madera y barnizarlo con un algodón, experimentarán las diferencias entre estos materiales y las nombrarán con los adjetivos blando y duro, respectivamente.

- C. *Humedad de los objetos*. Cuando realicen actividades en las que intervenga su contacto o el de otros objetos con el agua, diferenciarán entre seco y mojado, por ejemplo, introduciendo las manos bajo el chorro del grifo cuando se las lavan antes de almorzar y comparándolas una vez se las han secado. Posteriormente, habrá que añadir nuevos matices, nuevas sensaciones de esta cualidad, así, entre seco y mojado se podría situar la sensación de húmedo, tocando la tierra de una maceta que forma parte de las plantas que se cuidan en el aula y que se ha regado con suficiente antelación o la toalla con la que ya se han secado las manos. En todos los casos el alumnado debe utilizar el vocabulario asociado.
- D. *Temperatura de los objetos*. Además de las cualidades anteriores, cuando los niños y las niñas entran en contacto con objetos también perciben su temperatura, por ejemplo, cuando tocan el cristal de las ventanas, el radiador de la calefacción, cuando comen un helado o sopa... Las referencias a esta cualidad se llaman frío y caliente y, normalmente, forman parte de su bagaje vital previo. Añadiremos nuevos matices respecto de ella hablando de templado, que se situaría entre lo frío y lo caliente cuando tocan, por ejemplo, a otro compañero, cuando pisan descalzos el tatami de psicomotricidad o tocan un vaso de leche que se haya calentado un poco en el comedor de la escuela.
- E. *Tamaño, forma y grosor de los objetos*. Todas las matizaciones respecto a estas tres cualidades que se han tratado para la vista se trabajarán también con el tacto, realizando actividades en las que el alumnado manipule objetos que no pueda ver para reconocer y verbalizar sus características, que habrán conocido y trabajado previamente por la vista.
- F. *Materiales concretos*. Se completará todo el trabajo anterior con el reconocimiento por el tacto de materiales cotidianos, como la madera, el vidrio, el metal, el papel, el plástico, las telas, el mármol... Serán las combinaciones de las anteriores cualidades, las que les permitirán identificar uno u otro. Por ejemplo, liso, frío y suave son las características del vidrio; templado, rugoso y suave corresponden a la pana... El trabajo de averiguar cuál es cuál les hará profundizar en la reflexión sobre lo que el tacto les dice.

El estudio de cada una de las características táctiles que acabamos de mencionar empieza con la diferencia entre grandes contrastes y se matiza poco a poco a lo largo del 2.º ciclo con la introducción de los modificadores mucho, poco, etc. (muy mojado, muy suave, poco frío...).

1.4. Distinguir características sensoriales por medio del olfato

El olfato es uno de los cinco sentidos que nos aproxima a lo que nos rodea. Pero de la misma forma que el tacto y la vista nos dan una información bastante objetiva

de la realidad, no ocurre así con el olfato. Este es muy subjetivo. Es evidente que habrá olores que obtengan un consenso generalizado, aquello que haga muy mal olor o lo que lo haga muy bueno. Pero a pesar de esto, este sentido junto con el del gusto, entra dentro de la parte más personal que tenemos para acceder a lo que nos parece la realidad.

A lo largo del 2.º ciclo habrá que incidir en diferencias muy marcadas entre objetos o cosas que hagan buen olor, mal olor o que no huelan. Está claro que las dos primeras sensaciones no plantean ninguna dificultad por ser muy fácil encontrar objetos que las provoquen (perfume, chocolate, amoníaco, pescado...). La ausencia de olor es más complicada de trabajar, porque resulta difícil aislar un objeto inodoro de otros que lo rodean para conseguir que la sensación sea real. Por ejemplo, si queremos oler agua destilada debemos utilizar un vaso de cristal para evitar las interferencias olfativas de los envases de plástico.

En general, los niños y las niñas diferenciarán entre lo que les resulta agradable, lo que no se lo resulta y lo que no les provoca ninguna sensación de este tipo, proporcionándoles diferentes elementos que olerán con los ojos tapados o cerrados, verbalizando sus percepciones. El material que utilizaremos para estas actividades se obtendrá directamente de elementos presentes en el aula o de otros que traerán de casa a indicación nuestra y que estarán relacionados con el desarrollo de algún proyecto o situación de aula.

En la segunda mitad del ciclo, el trabajo se centrará en asociar aromas, perfumes, olores tanto agradables como desagradables, a los elementos que los producen (naranja, pintura, chorizo, crema corporal, lejía, alcantarilla sucia...).

1.5. Distinguir características sensoriales por medio del gusto

El gusto es un sentido muy importante en la vida de las personas porque está ligado al placer de comer. De manera análoga al sentido del olfato al que está frecuentemente unido, el gusto está también ligado a la subjetividad de la persona, aunque hay algunos sabores reconocidos de manera universal que es necesario aprender para poder describir lo que degustamos.

Al principio del ciclo hay que diferenciar claramente entre lo que es dulce, salado o insípido (galletas, chocolate, golosinas...; papas, pipas...; agua...) sabiendo que el sabor es complicado de trabajar por razones semejantes a las del olfato.

Más adelante, se ampliará a otros sabores, como ácido y amargo. Buscaremos ejemplos próximos a ellos y ellas para que fijen el sabor. Así, el yogur natural sin azúcar o el limón tienen un sabor ácido, y el pomelo, los tallos de las alcachofas, la tónica o el biter sin alcohol, lo tienen amargo.

Los niños y las niñas distinguirán entre dulce, salado, ácido y amargo, saboreando diferentes elementos con los ojos tapados o cerrados y evitando, dentro de lo

posible, interferencias del olfato. Utilizaremos para esta tarea objetos o elementos presentes en el aula o que hayan traído de casa por indicación nuestra y que de nuevo formarán parte de la actividad habitual de la clase.

Completaremos este trabajo desarrollando la capacidad de asociar algunos sabores fáciles de identificar a los elementos que los producen (crema de chocolate, jamón serrano, manzana, limón, naranja...).

De manera análoga a los otros sentidos, podemos ir matizando poco a poco las diferencias de sabores con la introducción de los modificadores muy, poco, etc. (muy dulce, muy ácido, poco salado...).

1.6. Distinguir características sensoriales por medio del oído

Generalmente, se entiende por educar el oído un trabajo musical, pero nuestro objetivo es solo reconocer sonidos, distinguirlos y saber de dónde vienen. Para ello trabajaremos con el alumnado la identificación de los que habitualmente encuentran a su alrededor y la verbalización de su origen de acuerdo a las nociones de orientación espacial.

Empezaremos por sonidos cotidianos como los que provienen de la calle (de una moto, de un claxon, de unas campanas...), de casa (del timbre, de la radio, de la lavadora...), del colegio (música de inicio, del golpe de una puerta, del ordenador...), etc. También los que pueden estar presentes en diferentes lugares a la vez.

Posteriormente, distinguirán los sonidos ambientales de los más musicales y los que les resulten agradables de los que no.

Intentaremos que asocien de manera inequívoca algunos sonidos concretos a los lugares en los que se producen y que discriminen claramente los que no les corresponden, por ejemplo, será usual oír la lavadora en el ambiente del hogar pero no en el aula.

2. Describir diversas características que tiene un objeto

En el momento en que somos capaces de describir algunas características de los objetos del entorno, estamos preparados para transmitir a otros los aspectos de la realidad que hemos conocido. Estos pasos iniciales son esenciales para poder agrupar y relacionar los objetos, que es nuestro último objetivo. Se ha intentado estimular, desde el punto de vista del análisis, los sentidos que captan y se apropián de las características de todo lo que les rodea. Una vez interiorizadas estas por el alumnado, se les pedirá el siguiente paso que consistirá en transmitir lo que han percibido por medio de la descripción de las propiedades de los objetos.

Este trabajo es para todo el 2.º ciclo de infantil y la dificultad será creciente y adecuada a su nivel. Cada vez les pediremos descripciones más cuidadosas, con más

características y más completas. Por ejemplo, si se trata de describir una pelota, al principio será suficiente con decir que es redonda, más adelante esperaremos que añadan grande, azul, dura, rugosa, etc.

3. Describir diversas características que no tiene un objeto

En muchas situaciones de la vida diaria, nuestro pensamiento a la hora de describir objetos se refiere a características en negativo, es decir, se fija en aquellas propiedades que un objeto no tiene (porque nos gustaría que las tuviese, porque lo comparamos con otro que sí las tiene...). Por ejemplo, al describir un coche aclarar que no tiene el techo plegable, o que no es eléctrico, o que no es un 4×4 .

Este trabajo es, en general, más complicado que el de las descripciones anteriores, en las que se descubren las cualidades que sí están presentes y se verbalizan, porque requiere pensar en las que no se ven y ser capaces de argumentar que no están presentes.

Evidentemente es también más complicado para los niños y las niñas de educación infantil y, en muchas ocasiones, es más anárquico y autónomo que controlar las cualidades que sí están presentes en los objetos a describir. Por ejemplo, las cosas rojas son solo rojas, pero las que no lo son pueden ser azules, amarillas, verdes...

Lo trabajaremos en la segunda mitad del 2.º ciclo y, si no encuentran las características que no están presentes, podemos ayudarles con preguntas específicas respecto a ellas o comparando el objeto a describir con otro u otros que sí las tengan. Por ejemplo, si esperamos que nos digan de una carpeta que no es de cartón, podemos compararla con otra que sí lo sea para que descubran la diferencia. Así mismo, se pueden hacer estos tipos de actividades utilizando los bloques lógicos de Dienes como una ayuda muy valiosa para trabajar esta capacidad.

Cuando hayan descrito objetos utilizando de forma separada las dos maneras de expresar sus características, estarán preparados para usar en sus descripciones expresiones combinadas en las que se refieran tanto a características presentes en un determinado objeto, como a las que no lo están.

4. Reconocer características de objetos representados en imágenes

Para ampliar el desarrollo de las capacidades de descripción de características, el alumnado trabajará también, en los dos últimos cursos de la etapa, con objetos que no puedan manipular sino que solo observen en representaciones gráficas de diversos tipos: dibujos, revistas, pósteres, fotografías, catálogos..., relacionadas con diferentes proyectos o situaciones que se lleven a cabo en el aula.

Evidentemente se tratará de objetos conocidos y próximos a los niños y las niñas, que habrán manipulado con anterioridad y que ahora deben describir sin tenerlos delante físicamente.

En estas descripciones el sentido que más usan es el de la vista y siempre empiezan nombrando las características visuales que observan. Se intentará hacia el final del ciclo que también expliciten en estas descripciones características que puedan haber conocido con anterioridad respecto de los otros sentidos y que estén presentes en los objetos trabajados. Tienen que imaginar, han de hacer el esfuerzo de recordar cómo es ese objeto en la realidad para hacer una descripción lo más fiel posible. Por ejemplo, empezarán describiendo una naranja diciendo que es redonda y de color naranja, pero más adelante tendrán que llegar a decir que es dura, rugosa, ácida, húmeda en el interior y seca en el exterior...

5. Identificar objetos determinados por varias de sus características

La construcción del conocimiento se completa realizando actividades inversas a las de las capacidades 2 y 3. En este caso, y a partir de una descripción que les proporcionaremos, tendrán que encontrar el objeto susceptible de cumplirla. Pero deben estar antes entrenados en lo que supone la descripción para que puedan entender los mecanismos que la dirigen.

Se trabajará en todo el 2.º ciclo y se pueden usar, como complemento, juegos de adivinanzas o de veo-veo. Normalmente, en las primeras actividades de este tipo, será el docente quien describa el objeto que ha de encontrar el alumnado. Hacia el final de la etapa pueden ser ellos y ellas quienes hagan la descripción para que otros compañeros encuentren el objeto.

Hemos de destacar que si solo estamos buscando objetos que cumplan unas características determinadas, puede haber varios que sirvan como respuesta. Por el contrario, si estamos jugando a adivinanzas o a veo-veo, solo servirá un objeto concreto como respuesta a la descripción planteada.

6. Identificar diversos elementos que tienen una misma característica

Hasta ahora lo que nos interesaba era describir las cualidades que tiene un objeto y por eso hemos dotado al alumnado de herramientas para hacerlo.

Como complemento haremos un trabajo que necesita un poco más de abstracción, en el que nos interesa la característica o cualidad común a varios objetos.

Se trata ahora de que los niños y las niñas, al desarrollar algunas de las situaciones que se trabajan en el aula, agrupen unos cuantos objetos que tengan una misma característica, por ejemplo, que cojan tres lápices rojos de la bandeja de los colores para pintar el mural o que traigan unas cuantas telas lisas que encuentren en el rincón de los disfraces.

Estas tareas se realizan en todo el 2.º ciclo de infantil y constituye el primer paso para la tarea posterior de formar conjuntos que se estudiará en la capacidad siguiente. Solo es un primer paso, porque hasta que no se pidan todos los elementos

del conjunto referencial que tienen una característica común, no se formará verdaderamente ese conjunto.

7. Formar conjuntos según características sensoriales de los objetos

Como se comenta en el punto 3.1, el trabajo en el aula de educación infantil debe posibilitar que los niños y las niñas avancen «desde un conocimiento físico de los objetos hasta un conocimiento lógico-matemático de los mismos, que les permita agruparlos y relacionarlos en función de sus semejanzas o de sus diferencias».

Hasta ahora se ha desarrollado un trabajo más centrado en los aspectos físicos de los objetos contemplados de manera individual, mientras que a partir de esta capacidad los consideraremos agrupados o relacionados entre ellos para avanzar en el conocimiento lógico-matemático antes mencionado.

Para realizar las actividades de formación de conjuntos hemos de tener en cuenta las siguientes orientaciones:

1. Siempre que sea posible, usar a los niños y las niñas como elementos del conjunto. Por ejemplo, formar un conjunto con todo el alumnado que ha traído fruta para almorzar.
2. Fijar muy claramente el conjunto referencial, para delimitar sin ninguna duda los objetos con los que han de trabajar. Por ejemplo, si se quiere formar un conjunto de piezas de construcción de madera, aclarar muy bien que se han de sacar de una caja determinada en la que están los que nos interesan, evitando así que puedan dispersarse buscando por toda la clase.
3. Usar lugares diferentes para formar los conjuntos y que no sea siempre en el suelo o en las mesas del aula, para posibilitar la generalización del concepto. Por ejemplo, reconocer el conjunto de niños y niñas que forman un grupo determinado en el aula tanto si están en la mesa de trabajo, como si están en la alfombra de la asamblea, como si se encuentran en el patio.
4. En el caso de utilizar diagramas para representar conjuntos, estos deben ser de diferentes formas (triangulares, rectangulares...) para facilitar la mencionada generalización de la idea de conjunto y evitar que se asocie solo a los diagramas de Venn.
5. Trabajar con propiedades características claras y apropiadas a las edades del alumnado. Por ejemplo, no es conveniente formar un conjunto de mochilas por su precio sino por su color.
6. Utilizar diferentes situaciones de aula para trabajar los conjuntos, sabiendo que estos nos pueden ayudar a desarrollar otros conceptos y a resolver otras situaciones problemáticas.

La extensión de esta capacidad aconseja fraccionarla en apartados diferenciados y ordenados por su dificultad en el aula de educación infantil.

7.1. Formar conjuntos determinados por una característica enunciada de forma afirmativa

Empezaremos con situaciones reales muy próximas a los niños y las niñas, que les interesen y con las que puedan sentirse identificados. Debemos insistir en la necesidad de agrupar *todos* los elementos de un conjunto referencial que cumplan una característica concreta para que esté correctamente formado el conjunto que esta determina.

Las indicaciones que daremos al alumnado referentes a la formación de conjuntos se referirán solo a una característica que será común a todos los elementos que nos interesan, además de ser muy clara y conocida por ellos y ellas (por ejemplo, colores, formas, tamaños...). Es necesario fijar claramente el referencial y usar la palabra *todos* entendiéndola como la que nos obliga a no dejar de coger ningún elemento que debería formar parte del conjunto. Un ejemplo de este trabajo podría ser «en una situación de aula en la que los niños y las niñas están preparando material para pintar un dibujo, les pedimos que del bote de los lápices de colores saquen *todos* los que son verdes» y otro: «alrededor de una actividad de educación física en la que se va a hacer una carrera en el patio, les pedimos que se coloquen juntos, en un lugar determinado, todos los que lleven calzado deportivo».

En los primeros pasos de esta tarea puede producirse el llamado *error de contaminación* (según Piaget), que consiste en cambiar la característica que determina el conjunto que están formando por otra de alguno o algunos elementos ya incorporados al conjunto, que en ese momento cobra más interés para el alumnado (habitualmente eligen una característica del último elemento que han seleccionado para formar parte del conjunto, como puede verse en la figura 12). Por ejemplo, supongamos que de un conjunto referencial formado por unas cuantas piezas de los bloques lógicos, se pide reunir todas las piezas de color azul para hacer con ellas una torre. En un momento de la selección un niño o niña elige un círculo azul. El error de contaminación se manifiesta cuando a partir de ese momento empieza a coger círculos olvidando el color azul y contaminando esta característica con la de círculo. No es que no haya entendido lo que debía hacer, es que su atención se centra a partir de una determinada pieza en otro interés, en otra característica.



Figura 12. Representación de un ejemplo de error de contaminación

Como este problema se presenta con más frecuencia cuando el referencial tiene muchos elementos y el conjunto que hemos de formar también tiene un cardinal elevado, empezaremos trabajando la formación de conjuntos en los que no haya muchos elementos, a partir de referenciales cuyos cardinales no sean muy elevados.

En cualquier caso, si se produce el error de contaminación, y para ayudarles a superarlo, les haremos preguntas comparando el elemento incorrecto con los que habían cogido al principio y reflexionando con ellos y ellas sobre cuál era la característica que determinaba el conjunto para hacerles detectar su equivocación y darles la posibilidad de arreglarla. En el ejemplo anterior, si cogen un círculo amarillo les preguntaremos qué color tienen todas las piezas anteriores, para que se den cuenta de que la característica común es el color azul y no la forma círculo.

Cuando el alumnado acabe la tarea de formar un conjunto hablaremos con ellos y ellas empezando por recordar cuál era la propiedad característica que determinaba el conjunto y preguntándoles si están todos los elementos que lo integran, si no han dejado ninguno fuera y fijando así, definitivamente, la característica del conjunto formado.

Más adelante, haremos el mismo tipo de actividades e iremos aumentando el número de elementos del referencial y de los conjuntos que formen, insistiendo en la necesidad de que estén *todos* los elementos que tienen una característica común para tener formado el conjunto.

Como los niños y las niñas van conociendo cada vez más cualidades de los objetos, podremos utilizar también las nuevas (longitud, anchura, textura, etc.) ampliando las posibilidades de formación de conjuntos que existían al comienzo de este trabajo.

Para referirse a los grupos de objetos formados, el docente usará la palabra *conjunto* (hemos formado el conjunto de lápices verdes, de las piezas amarillas, de los niños y las niñas con dos hermanos...) hasta que esta pase, avanzada la etapa de infantil, a formar parte del vocabulario habitual del alumnado para nombrar los grupos de elementos con una característica común.

Las confusiones que se producen al formar los conjuntos, motivadas por el error de contaminación antes mencionado, van desapareciendo a medida que el alumnado crece y, normalmente, están totalmente superadas hacia el final de esta etapa.

7.2. Formar conjuntos determinados por una característica enunciada de forma negativa

Una vez trabajada la capacidad 3 y recorridos los primeros pasos de la 7.1, se puede iniciar la formación de conjuntos utilizando para determinarlos características enunciadas de forma negativa (en el caso de los lápices de colores, les pediríamos todos los que no son rojos, por ejemplo).

Es una manera de formar conjuntos más complicada que la anterior y, generalmente, va acompañada de preguntas del alumnado como «pero, ¿quieres los amarillos, los azules o cuáles?». Frente a estos interrogantes nos mantendremos en la negación de la característica indicada, «los que no son rojos», para ayudar a que se produzca en los niños y las niñas el pensamiento que les permita discriminar la información y averiguar cuáles son los elementos que nos interesan, como puede verse en la figura 13.

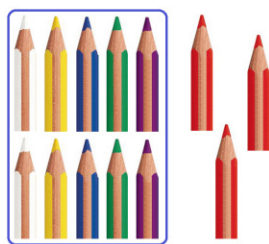


Figura 13. Representación de un conjunto determinado por una característica negativa

Este trabajo comparte con la capacidad anterior el hecho de entender y utilizar adecuadamente las palabras *todo* y *conjunto*, la última solo por parte del docente en un principio y por todo el alumnado al final de la etapa.

7.3. *Formar conjuntos determinados por una característica y observar el que determina la negación de esta*

Hasta ahora se ha trabajado por separado la formación de conjuntos determinados por características enunciadas de forma afirmativa y de forma negativa. Lo que se pretende en esta capacidad es reflexionar con los niños y las niñas para que se den cuenta de que siempre que forman un conjunto determinado por una característica afirmativa, aparece formado automáticamente el que tiene como característica la negación de la anterior. Por ejemplo, relacionado con una situación de aula en la que se están trabajando los alimentos, han formado el conjunto de «niñas y niños que han traído fruta para almorzar» a partir del referencial de todo el alumnado de la clase; todos los que no se han incorporado a este conjunto forman por su parte otro conjunto cuya característica es «no haber traído fruta para almorzar». En la figura 14, en un ejemplo con piezas grandes de los bloques lógicos, se ve claramente cómo la formación del conjunto de círculos implica inmediatamente la del conjunto de los que no son círculos.

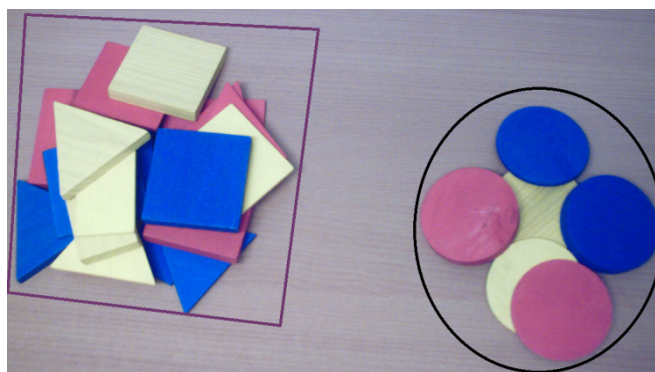


Figura 14. Representación de un conjunto de círculos y otro de los que no lo son

En el fondo lo que se está trabajando es el concepto de complementario, aunque no es necesario utilizar este vocabulario con los niños y las niñas. Como el desarrollo de esta capacidad exige conocer en profundidad las dos maneras de formar conjuntos que se han trabajado en la 7.1 y la 7.2, dejaremos esta tarea para la última parte del 2.º ciclo.

Es importante reflexionar con el alumnado alrededor de las propiedades características de los dos conjuntos y de la presencia respectiva en cada uno de ellos de todos los elementos que las cumplen. También tendremos que conversar con ellos y ellas sobre las características de los conjuntos para que verbalicen correctamente tanto la que es afirmativa (conjunto de los círculos) como su negación (conjunto de los que no son círculos).

Igualmente, aprovecharemos esta capacidad para reforzar el uso adecuado de las palabras *todos* y *conjunto*, de manera análoga a los casos anteriores.

7.4. Formar conjuntos determinados por más de una característica común

También en el último curso y como complemento de lo que ya se ha trabajado en las capacidades anteriores, se inicia la formación de conjuntos determinados por varias características comunes. Evidentemente, el primer paso será utilizar solo dos (por ejemplo, en una actividad de decorar un mural, les pedimos que traigan del armario del material escolar todos los botes de pintura de dedos de color rojo) y, si se ve que no representa mucha dificultad, ampliar las características hasta que los conjuntos queden determinados por tres o cuatro de ellas. Esta última posibilidad se dará generalmente cuando los niños y las niñas se encuentren en una situación con mucho interés para ellos, en la que intervengan materiales u objetos cuyas características sean muy conocidas y estén muy bien estructuradas, como ocurre en el caso de los bloques lógicos.

Más adelante, se puede ampliar la dificultad combinando alguna característica enunciada de forma afirmativa con otra de forma negativa (de entre todo el alumnado de la clase y para realizar un determinado juego tienen que elegir las que son chicas y no lleven calzado deportivo, por ejemplo).

También dedicaremos atención al refuerzo del vocabulario asociado y a su uso adecuado.

8. Enumerar los elementos que forman parte de un conjunto y reconocer algunos que no forman parte de él

De manera complementaria a la tarea de formar conjuntos, potenciaremos en el alumnado la realización de un trabajo de revisión de lo que han hecho y de explicación de las razones por las que están en el conjunto unos determinados elementos y otros no. Esta actividad de reflexión les permite pasar de una visión más general del conjunto y de su propiedad característica, a otra más analítica, que pone la mirada en los elementos uno a uno y comprueba su idoneidad en el ámbito del conjunto formado.

El análisis reflexivo de los elementos debe llevarles a darse cuenta de que cada uno de ellos puede estar en diferentes conjuntos según la característica principal que se

elija. Esos elementos pertenecen a un conjunto porque hay un criterio basado en una determinada propiedad característica que los ha reunido y que no es incompatible con otros criterios que sitúen a algunos elementos en conjuntos diferentes (un determinado rotulador puede formar parte de un conjunto de rotuladores, de uno de rotuladores con tapa, de uno de objetos de escritura verdes...).

Se desarrollará esta capacidad durante todo el 2.º ciclo de infantil y se utilizará en los dos últimos años el vocabulario *pertenecer* y *no pertenecer* para expresar la relación que existe entre los elementos y los conjuntos, por ejemplo, el rotulador verde pertenece al conjunto de objetos de escritura verdes.

9. Identificar la propiedad característica que determina un conjunto

Haciendo referencia de nuevo a la reversibilidad en la construcción del conocimiento, trabajaremos con el alumnado para que sean capaces de identificar la propiedad característica de un conjunto que ya está formado, es decir, para que encuentren el criterio por el cual hemos agrupado unos determinados elementos. Evidentemente se tratará de una sola característica que, además de estar presente de manera afirmativa, será clara y conocida por los niños y las niñas.

Esta tarea no puede realizarse hasta que no esté trabajada la formación inicial de conjuntos y el alumnado haya incorporado el agrupamiento de elementos como una acción habitual en sus actividades. Por este motivo, no desarrollaremos esta capacidad hasta la segunda mitad del 2.º ciclo de infantil.

Cuando les preguntemos: ¿cómo son los elementos de un conjunto?, ¿en qué se parecen?, ¿por qué los hemos agrupado así?, la respuesta adecuada debe servir para explicar la propiedad característica que nos ha permitido reunirlos. En principio no les resulta fácil de encontrar. La tarea de abstraer la propiedad común a partir del análisis de los elementos del conjunto es bastante más difícil que la de seleccionar los que cumplen una determinada característica explícita. Con mucha frecuencia resulta necesaria la intervención del docente para conseguir que sean capaces de encontrar la propiedad que están buscando. Por medio de preguntas de ayuda (¿cómo es este?, ¿y este?, ¿se parecen?, ¿cómo son todos?...) el docente intentará que los niños y las niñas comparen las características de los diferentes elementos del conjunto y detecten cuál es la que está presente en todos ellos.

En el desarrollo de estas actividades se presenta a veces el llamado *error de limitación* (según Piaget). Se produce en los primeros momentos de trabajar la capacidad y consiste en limitar la propiedad general del conjunto por otras características que solo cumplen unos cuantos elementos del mismo. Por ejemplo, si tenemos formado un conjunto con todas las piezas triangulares de los bloques lógicos (figura 15), en lugar de descubrir el ser triángulo como la propiedad buscada, nos dicen que tienen un conjunto con «piezas amarillas, azules y rojas» o un conjunto de «piezas grandes y pequeñas». Para ayudarles a superar este error es necesario interactuar con ellos utilizando las preguntas mencionadas antes, para potenciar la reflexión que les permita abstraer la característica buscada.



Figura 15. Representación de un ejemplo para ilustrar el error de limitación

Hacia el final de la etapa ya no se produce este error de limitación y pueden encontrar ellos solos la propiedad característica afirmativa de un determinado conjunto. Como complemento de este trabajo podemos intentar la identificación de la propiedad característica de un conjunto cuando esta esté presente de manera negativa, aunque es más difícil y puede que no lo consigan en educación infantil, a no ser que se utilicen materiales con característica que les sean muy conocidas (círculos no rojos, por ejemplo).

10. Formar conjuntos a partir de elementos representados en imágenes

Todo lo que se ha comentado en las capacidades anteriores respecto a la formación de conjuntos se refiere a situaciones en las que los elementos son objetos reales que se encuentran al alcance del alumnado para que puedan manipularlos y agruparlos. En los dos últimos cursos de la etapa se pueden plantear también actividades en las que sea necesario formar conjuntos trabajando con representaciones gráficas (póster, revista, catálogo, fotografía, actividad de transferencia...) donde los elementos del conjunto referencial ocupan todo el papel y los del conjunto que queremos formar están diseminados entre los otros. Se trata de indicar cuáles son los elementos que nos interesan utilizando una marca gráfica que los distinga, por ejemplo, en una imagen que contiene diferentes animales y que se está trabajando en el aula con motivo de la visita a una granja escuela, les pedimos que marquen de alguna manera las vacas para recortarlas después.

Podemos usar diferentes sistemas de representación que recorrerán los siguientes pasos:

1. Tachar, pintar del mismo color o poner una marca similar sobre los elementos del conjunto que se quiere formar. Aún no utilizamos el diagrama clásico. En el ejemplo de las vacas las marcarían con una cruz de color rojo, como se muestra en la figura 16.

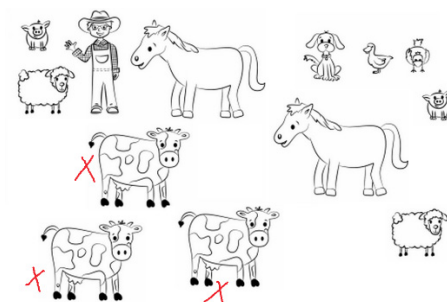


Figura 16. Representación con cruces de la selección de los elementos de un conjunto

2. Rodear individualmente cada elemento que forma parte del conjunto, sin utilizar aún un diagrama común para todos. En el mismo ejemplo, el alumnado rodea cada vaca con una línea cerrada de color verde, como se muestra en la figura 17.

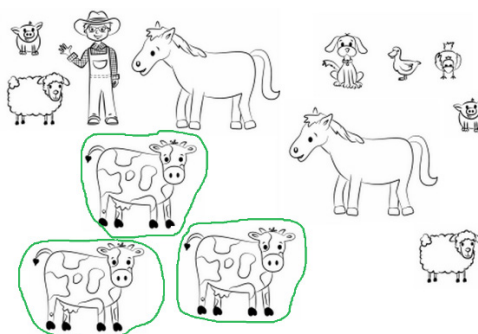


Figura 17. Representación con diagrama individual de la selección de los elementos de un conjunto

3. Introducir el diagrama que englobe todos los elementos que forman el conjunto, como una línea cerrada que nos permite separar los elementos que nos interesan de los que no. Siguiendo con el ejemplo de la granja, los niños y las niñas han rodeado todas las vacas con una línea cerrada de color morado, como se muestra en la figura 18.

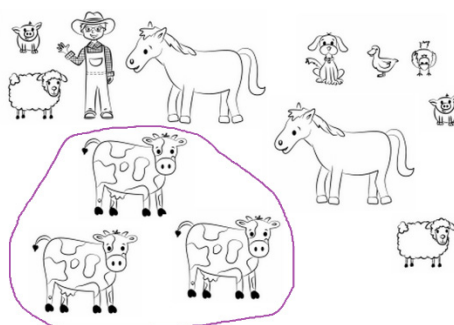


Figura 18. Representación con un único diagrama de los elementos de un conjunto

En todo este trabajo es importante recordar la orientación 4 de la capacidad 7, en la que se recomienda utilizar diagramas de diferentes formas para representar conjuntos, con el fin de facilitar la generalización del concepto.

11. Representar gráficamente los conjuntos formados

Esta capacidad intenta avanzar con el alumnado en la parte del simbolismo. Se pretende que puedan ser capaces de trasladar al papel conjuntos que han formado en la realidad. Esta acción se debe justificar desde la necesidad de hacerla para «guardarlo», para «recordarlo», para «no olvidarnos a la hora de explicarlo en casa» o «a otro grupo de compañeras y compañeros del colegio», por ejemplo. Se debe entender la representación como algo útil para que esté motivada su construcción.

Normalmente se trabaja en el último curso de la etapa y forma parte del inicio de los niños y las niñas en el lenguaje matemático, atendiendo a razones de economía de escritura, de exactitud en la transmisión de la información... Por ejemplo, hemos formado dos conjuntos, uno con algunas niñas para representar un cuento y otro con unos cuantos chicos para representar otro. Entonces anotaremos los nombres de cada uno de ellos y ellas y los rodearemos por separado con dos diagramas.

Hemos de recordar la importancia de utilizar diagramas diferentes y de observar que el conjunto existe con independencia del diagrama, que este solo actúa como una frontera que nos ayuda a localizar los elementos que nos interesan encerrándolos en su interior y separándolos del resto.

12. Encontrar diferencias entre los elementos de un conjunto determinado por una característica y formar subconjuntos a partir de ellas

Cuando se ha formado un conjunto, todos los elementos del conjunto referencial que cumplen la característica que lo determina están incluidos en él, pero debemos darnos cuenta de que, además de la mencionada característica, algunos elementos pueden tener otra u otras cualidades comunes. Ese es el objetivo, observarlos e intentar agrupar estos elementos en otros conjuntos que llamaremos subconjuntos del inicial (prefijo *sub* por encontrarse dentro de otro).

Por ejemplo, si construimos el conjunto de las piezas grandes de los bloques lógicos, dentro de él tenemos piezas de varias formas. Por tanto, un subconjunto que podemos encontrar es el de los triángulos grandes, como se muestra en la figura 19.

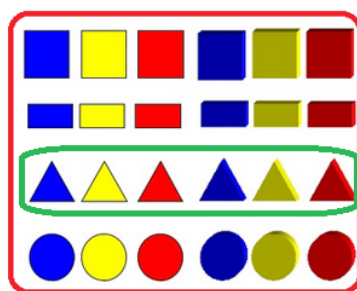


Figura 19. Representación del subconjunto de triángulos dentro de las piezas grandes de los bloques lógicos

La complicación de este trabajo está relacionada con la dificultad del alumnado para realizar clasificaciones jerárquicas de elementos, hecho que provoca el olvido por parte de muchos niños y niñas de la característica que determina el conjunto inicial del que se ha sacado el subconjunto y la identificación de este último solo por la segunda característica observada. Es necesario hacerles conscientes de que las piezas del subconjunto cumplen la condición de ser grandes y triángulos, es decir, verifican las dos propiedades características consideradas y, por tanto, pertenecen a los dos conjuntos.

Evidentemente, para desarrollar esta capacidad, es necesario haber trabajado con anterioridad la formación de conjuntos determinados por dos características. Por esta razón, la reservamos para el último curso de educación infantil.

13. Clasificar elementos por semejanzas cualitativas

La palabra *clasificar* tiene la misma etimología que *clases* y también un significado semejante en el contexto en el que nos encontramos. Clasificar elementos es una tarea asociada a la existencia de una relación binaria de equivalencia, que nos permite agruparlos reuniendo en un mismo conjunto los elementos que se relacionan precisamente por la RBE (véase 2.4 de este tema). Por ejemplo, en el conjunto de piezas de los bloques lógicos, la relación «ser del mismo color» es de equivalencia y clasifica los bloques en tres conjuntos. Las clases de equivalencia serán las agrupaciones que formaremos con los elementos que son equivalentes por la relación. En el ejemplo anterior, los tres grupos formados son la clase de los bloques lógicos rojos, la de los azules y la de los amarillos. Para que una clasificación esté bien realizada todos los elementos del conjunto referencial deben pertenecer a alguna de las clases de equivalencia y ninguno de ellos puede formar parte de dos clases a la vez.

Es necesario diferenciar este concepto del de formar un conjunto porque, aunque mantienen una dinámica que podríamos considerar semejante, al acabar las dos acciones el resultado no lo es tanto. Podemos establecer tres diferencias claras, trabajando en cualquier conjunto referencial:

1. *Propiedad frente a valor.* Cuando se clasifica, se define la relación de equivalencia en función de una propiedad general de los elementos, por ejemplo «ser del mismo color» en un conjunto formado por algunas piezas de los

bloques lógicos que se ha elegido como referencial (figura 20, izquierda). La formación de un conjunto se realiza a partir de un valor concreto de alguna de las propiedades de los elementos, por ejemplo «ser rojas» en el referencial anterior (figura 20, derecha).

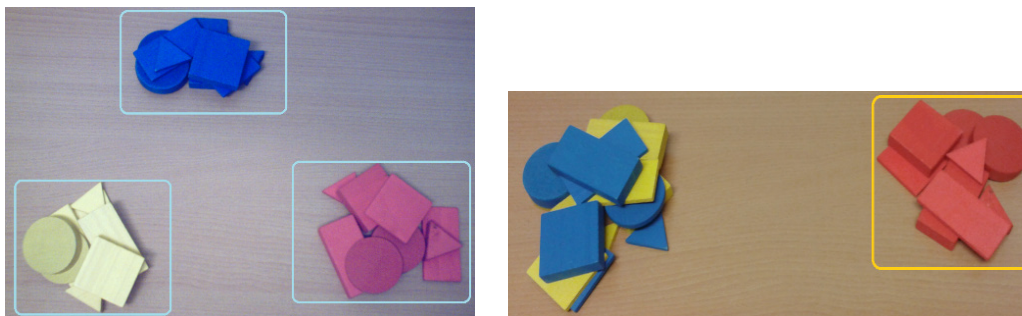


Figura 20. Clasificación de algunos bloques lógicos por el color (izquierda); formación del conjunto de piezas rojas (derecha)

2. *Varios conjuntos frente a un conjunto.* Al clasificar obtenemos tantas clases de equivalencia como valores tiene la propiedad general considerada en la relación. Por ejemplo, si clasificamos por el tipo de vehículo un conjunto de piezas de plástico de seis medios de transporte diferentes y seis colores, obtenemos varios subconjuntos como se ve en la parte izquierda de la figura 21. Cuando formamos el conjunto de los aviones, solo se obtiene un conjunto (figura 21, derecha).

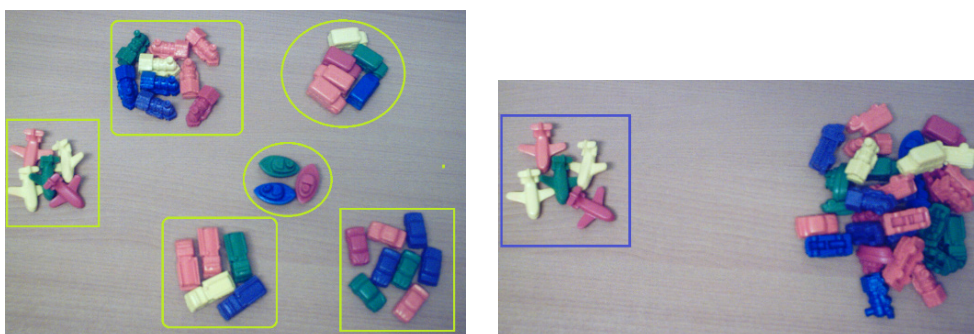


Figura 21. Clasificación de los medios de transporte por el tipo de vehículo (izquierda); formación del conjunto de aviones (derecha)

3. *Todos los elementos del conjunto referencial frente a solo unos cuantos.* En una clasificación todos los elementos del conjunto referencial pertenecen a alguna de las clases, mientras que cuando formamos un conjunto solo algunos de los elementos iniciales se agrupan para formarlo, como se ve claramente en las figuras 18 y 19.

En la realidad, los objetos, los animales, las personas, los hechos, las enfermedades, las profesiones..., están clasificados, unas veces por un criterio, otras por otro, pero clasificados. Por ello resulta necesario estudiar este aspecto y estimular desde la educación infantil actividades relacionadas con él, para enfrentarse a la realidad con uno de los conocimientos más necesarios para entenderla.

El trabajo de esta capacidad empezará al principio del segundo ciclo. Las primeras clasificaciones consistirán en la formación de parejas de elementos equivalentes, utilizando pocos elementos y obteniendo, por tanto, pocas clases. Un ejemplo puede ser a partir de una granja con animales de plástico entre los que hay dos gallinas, dos vacas y dos conejos, tienen que agrupar los animales que son del mismo tipo, obteniendo así tres clases (tres parejas). Esta iniciación mantiene la esencia de lo que es una clasificación: hay un conjunto referencial, formamos clases y los elementos quedan distribuidos totalmente. La dificultad de las actividades de formación de parejas ha de ser creciente durante el ciclo, aumentando la cantidad de elementos en el conjunto referencial, lo que provocará un aumento en el número de parejas.

Además de la formación de parejas, también se trabajarán las clasificaciones en las que se obtienen clases con más de dos elementos. Empezaremos utilizando conjuntos referenciales con pocos elementos para obtener pocas clases de cardinales pequeños. Usando un ejemplo semejante al anterior y partiendo de un conjunto de diez animales, agruparán tres ovejas, tres cerdos y cuatro caballos. A medida que avanza el ciclo aumentaremos el número de elementos del conjunto referencial y, por tanto, crecerá el número de clases que se obtienen y los cardinales de estas.

Es necesario acompañar la formación de las clases con la verbalización de las semejanzas entre los elementos que pertenecen a cada una de ellas. Por ejemplo, en el caso anterior el alumnado verbalizará: «Junto estos tres animales porque son ovejas, estos otros tres porque son cerdos...».

Como complemento de este trabajo inicial de clasificación y hacia el final del ciclo, podremos clasificar de varias maneras un mismo conjunto con la finalidad de observar las diferencias entre el número de clases que obtenemos en cada caso y entre sus respectivos cardinales. Si estamos utilizando un bote con instrumentos de escritura, por ejemplo, podremos clasificarlos por el tipo de objeto, por el color, por si tienen o no tapa, etc., y reflexionar con los niños y las niñas sobre los diferentes resultados que obtenemos (el número de clases, el de elementos por clase...). Un ejemplo gráfico se muestra en la figura 22, con diferentes clasificaciones de un conjunto de piezas de los bloques lógicos. En la parte izquierda se ha clasificado este conjunto en función del color de las piezas, obteniendo tres clases de equivalencia; en el centro, por su forma, obteniéndose cuatro y a la derecha se observan dos clases según el grosor de las piezas. En estas actividades se vuelve a insistir en la necesidad de que el alumnado sea consciente de las diversas características que están presentes a la vez en un mismo elemento.

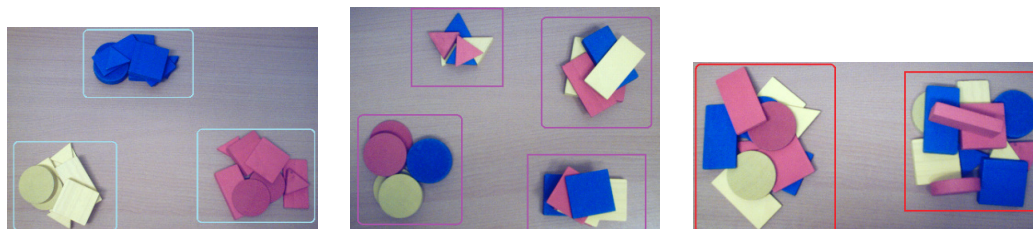


Figura 22. Clasificaciones de algunas piezas de los bloques lógicos: según el color (izquierda), la forma (centro) y el grosor (derecha)

También en este momento pueden hacer clasificaciones con elementos evocados, es decir, que no los tienen delante físicamente o en una imagen. Tienen que ser elementos de su entorno conocidos por ellos y ellas en los que puedan pensar fácilmente. Por ejemplo, pueden clasificar las personas de su familia, unos cuentos que hay en la biblioteca del aula pero que en ese momento no tienen en las manos, los juegos que más les gusten, etc.

Es necesario tener en cuenta que las propiedades de los objetos que utilizaremos como criterio para hacer las clasificaciones tendrán que ser muy claras, sencillas y bien conocidas por el alumnado.

14. Completar series de elementos en las que vayan cambiando las características del material según un criterio dado

El trabajo de completar series es muy diferente del que hemos visto en las capacidades anteriores referente a la formación de conjuntos o a las clasificaciones. Hablaremos de series cuando tengamos un conjunto de elementos ordenados de una determinada manera, teniendo en cuenta que este orden se concreta en la repetición de un grupo inicial de elementos que ya están ordenados y que llamaremos *módulo de la serie*. Lo que se pretende es que el alumnado repita este módulo en el orden adecuado hasta tenerlo una cantidad de veces determinada o hasta que se agoten los elementos.

Evidentemente, para completar series necesitamos que entre los elementos con los que trabajamos haya varios que sean iguales en todas sus características para poder repetir exactamente el módulo propuesto las veces que sea necesario.

Representaremos en este texto los diferentes tipos de módulos que utilizamos en las series por medio de expresiones numéricas en las que cada nuevo dígito indicará un cambio de propiedades en los elementos, el valor absoluto de los números nos dirá cuántos elementos iguales hay en el módulo y la suma de los dígitos será su cardinal. Por ejemplo, si trabajamos las series con fichas de parchís podemos proponer ordenarlas según los módulos siguientes:

- Módulo de la serie: rojo, amarillo, verde, azul (figura 23). Para abreviar en la redacción del texto lo representaremos por 1111, indicando así que ningún elemento se repite en el módulo.



Figura 23. Representación del módulo de cuatro elementos diferentes de una serie

- Módulo de la serie: rojo, rojo, amarillo, verde, azul (figura 24). La representación abreviada será ahora 2111, donde el 2 indica que hay dos fichas juntas del mismo color.



Figura 24. Representación del módulo de cinco elementos de una serie con tres cambios de característica

- Módulo de la serie: rojo, verde, verde, azul, amarillo, amarillo (figura 25). La representación 1212 sigue el mismo patrón que en los casos anteriores.



Figura 25. Representación del módulo de seis elementos de una serie con tres cambios de característica

Al principio del 2.º ciclo de infantil iniciaremos el trabajo de completar series cuyo módulo no tenga más de tres elementos y en las que cambie una sola propiedad de los mismos. Por ejemplo, si ensartamos bolas de madera para hacer un collar y queremos que los niños y niñas repitan una blanca y una negra o una amarilla, una azul y una roja, estaremos trabajando con una serie de módulo 11 o de módulo 111, respectivamente.

En los primeros pasos de estas actividades conviene proporcionarles un modelo que contenga dos veces el módulo para que puedan observar la repetición y descubrir cuál es realmente el módulo de la serie. En el ejemplo anterior les ofreceremos una amarilla, una azul, una roja y de nuevo una amarilla, una azul, una roja y el alumnado tendrá que repetir a continuación otro u otros grupos de tres bolas de los mismos colores en el mismo orden (figura 26). Si ensartáramos una bola verde, una roja y otra roja, el módulo que deberían repetir sería en este caso del tipo 12 y se trataría de una serie de más dificultad que la anterior.

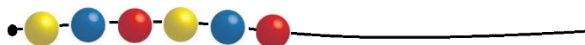


Figura 26. Representación de dos módulos, de tres elementos diferentes por una característica, de una serie

Una vez introducido el concepto de módulo de la series, no será necesario mostrarlo al alumnado más de una vez para que puedan continuar la serie.

Más adelante se puede aumentar el módulo de la serie y este podrá estar compuesto por hasta cinco elementos que se agruparán de uno en uno o en dos pequeños grupos de más de un elemento. Por ejemplo, si queremos decorar la clase pintando los muñecos de una cenefa de diferentes colores, podemos pintar un muñeco verde, uno rojo, uno azul, uno amarillo y uno naranja (módulo 11111) o dos rojos y tres azules (módulo 23, como se muestra en la figura 27) o uno verde y tres amarillos (módulo 13), etc., para que los niños y las niñas continúen coloreando los muñecos siguientes respetando este orden.



Figura 27. Representación de los cinco elementos del módulo de una serie con un cambio de una característica

En la segunda mitad del ciclo hemos de ampliar el trabajo manipulativo de las series con la utilización de módulos que se presentarán al alumnado por medio de representaciones gráficas. Al principio con pegatinas de diferentes formas, colores, tamaños, etc., o con objetos dibujados que colorearán (figura 27), para pasar posteriormente a que los niños y las niñas copien y pinten los diferentes elementos que componen la serie. También se podría hacer utilizando materiales didácticos estructurados adecuados para la formación de series gráficas (figura 28).



Figura 28. Ritmo (fabricado por Nathan)

Hacia el final del ciclo el módulo puede estar constituido por hasta 9 elementos que pueden agruparse de uno en uno o en varios grupos de más de un elemento. Así, volviendo al collar, podremos tener módulos 11111111 (una bola de cada color), 34 (tres bolas azules y cuatro amarillas), 1232 (una bola amarilla, dos azules, tres rojas y dos verdes, como se ve en la figura 29), 223 (dos bolas amarillas, dos azules, tres rojas), etc.

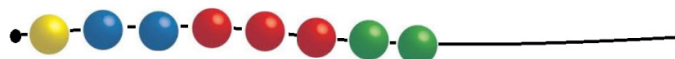


Figura 29. Representación de un módulo de ocho elementos de una serie con tres cambios de una característica

También podemos aumentar la dificultad de las series ordenando los elementos de acuerdo con la variación de más de una de sus propiedades, teniendo cuidado de que en estos casos el módulo no tenga muchos elementos. Por ejemplo, en el collar podemos utilizar bolas de tamaños diferentes y colocar una bola roja grande, una azul pequeña y una verde mediana (módulo 111, figura 30) o dos rojas grandes y tres azules pequeñas (módulo 23, figura 31). En el caso de las representaciones gráficas podemos trabajar también con series en las que cambie más de una propiedad.

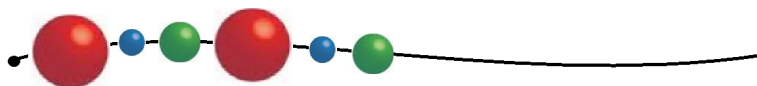


Figura 30. Representación de un módulo de tres elementos de una serie con dos cambios de dos características



Figura 31. Representación de un módulo de cinco elementos de una serie con un cambio de dos características

El nivel hasta el que se puede llegar a lo largo de la etapa en la dificultad de la tarea de completar series depende mucho de las posibilidades del alumnado. Si fuera posible, sería conveniente ampliarlo a series más complejas que las mencionadas, bien porque los módulos tengan más elementos o bien porque cambien más propiedades de los elementos a la vez. Además, también se intentará hacer este trabajo a partir de series inventadas por los propios niños y niñas.

15. Ordenar elementos según los matices de una de sus cualidades

Cuando se clasifica, lo que se hace es organizar la realidad en función de las semejanzas que tienen los objetos. En estas actividades lo importante es la similitud de las características. Pero, a veces, no nos interesan las semejanzas sino los diferentes matices que presentan los objetos respecto de alguna de sus cualidades. El tamaño, por ejemplo. Si queremos ordenar cajas por esta característica nos fijaremos en los diferentes tamaños que encontremos y en función de estas diferencias las ordenaremos.

Trabajaremos a partir de situaciones cotidianas para establecer las ordenaciones, no es necesario forzar actividades de orden porque perderían todo su interés inicial.

Relacionado con situaciones que se presenten en el aula empezaremos ordenando objetos cotidianos por tamaños y por longitudes aprovechando el conocimiento de grande, mediano, pequeño, largo y corto trabajado en la capacidad 1.2. Cuando se hayan realizado estas primeras ordenaciones podemos trabajar utilizando referencias de altura, anchura, grosor, y ordenando en principio solo tres elementos. Usando el vocabulario que se ha introducido en la capacidad 1, expresarán la relación de orden que establezcamos entre los elementos. Por ejemplo, en la ordenación creciente de unas cajas por sus tamaños, los niños y las niñas verbalizarán: «Esta caja es más pequeña que la siguiente, que es más pequeña que...».

Más tarde, ampliaremos la cantidad de elementos hasta cinco y los ordenaremos también a partir de otras características que puedan tener: temperatura, grado de humedad...

Hacia el final del ciclo repasaremos todo lo trabajado con anterioridad y ampliaremos la dificultad aumentando el número de elementos a ordenar y utilizando otros criterios más complicados (tonos de color, escalas de sonidos...).

A lo largo de todo el ciclo se puede completar el trabajo manipulativo que han hecho con objetos del entorno, con la utilización de materiales didácticos específicos (figura 32).



Figura 32. Pyramide 3 en 1, fabricado por Small Foot Company (izquierda) y Decreciente Tractores, fabricado por Willis Toys Ltd. (dreta)

16. Establecer correspondencias cualitativas entre los elementos de dos conjuntos

Las correspondencias son la manera de exponer matemáticamente las asociaciones que se establecen entre los elementos de dos conjuntos.

En esta capacidad se trabajarán situaciones reales en las que aparezcan correspondencias unívocas y biunívocas y aplicaciones biyectivas y no biyectivas (véase 2.3 de este tema), para que el alumnado pueda observar diferentes maneras de asociar unos elementos con otros. Evidentemente, el nombre de estos tipos de correspondencias y aplicaciones no se introducirá en el aula.

Al principio del ciclo hay que aprovechar las correspondencias habituales que se encuentran en su medio, por ejemplo: cada alumno/a se asocia con su nombre y apellidos (seguramente será una aplicación biyectiva); cada alumno/a se asocia con su foto para saber el lugar donde tiene que colgar la chaqueta (biyectiva); cada alumno/a se asocia con su sitio para sentarse (biyectiva si no quedan sillas vacías); cada alumno/a se asocia con su grupo de trabajo (no biyectiva, pero sí aplicación); cada mesa colectiva del aula con el grupo de trabajo que la ocupa (biyectiva, si no queda ninguna mesa vacía) (figura 33); cada rincón del aula con las actividades que se pueden desarrollar en él (correspondencia)...



Figura 33. Representación de una correspondencia entre mesas colectivas y grupos de trabajo

También se pueden trabajar las correspondencias que intervienen en juegos de asociación de sonidos con movimientos o acciones. Por ejemplo, los niños y las niñas caminan por dentro de la clase y tienen que cumplir las indicaciones siguientes: cuando el docente dé una palmada, se agachan; cuando hace sonar un silbato, dan un salto; cuando toca el tambor, se paran... En estos casos se pueden dar correctamente las instrucciones por medio de una aplicación biyectiva, como la del ejemplo, o se puede modificar la actuación de la maestra para hacer que aparezca algún sonido que no tenga ningún movimiento asociado, es decir, suena una flauta sin que tengan pauta para este sonido, por ejemplo. En este momento estaríamos trabajando con una correspondencia biunívoca.

Todas estas actividades van creando estructuras mentales que posibilitan la conexión con otros pensamientos posteriores más complicados, que son la base de futuros conceptos matemáticos (función cardinal y ordinal del número, por ejemplo).

También tendremos que trabajar correspondencias por criterios de uso, como la siguiente: en un conjunto tendríamos niños y niñas disfrazados de bombero, médico, cocinero, jardinero y policía, y encima de una mesa pondríamos una jeringuilla, un fonendoscopio, una manguera de bombero, una escalera, un puchero, un sombrero de cocinero, una regadera, un rastrillo. Cada niño o niña deberá coger los utensilios que corresponden a su profesión, con lo que conseguiríamos una correspondencia no unívoca.

Se pueden ampliar estas actividades con correspondencias por criterios de asociación de cualidades iguales. Por ejemplo, disponemos de una caja de globos y otra de cintas. El alumnado debe asociar cada globo con una cinta del mismo color que él para atarlo.

En la segunda mitad del ciclo hay que plantear juegos de transformación en los que tengan que construir una figura, bien con piezas reales o bien con pegatinas de diferentes formas y colores o con otros materiales, que reproduzca otra ya construida, aplicando un cambio a alguna de las características de las piezas que

componen la figura inicial. Por ejemplo, construimos una casita con piezas azules de los bloques lógicos y les pedimos que construyan otra casita del mismo formato pero con las piezas rojas (figura 34).

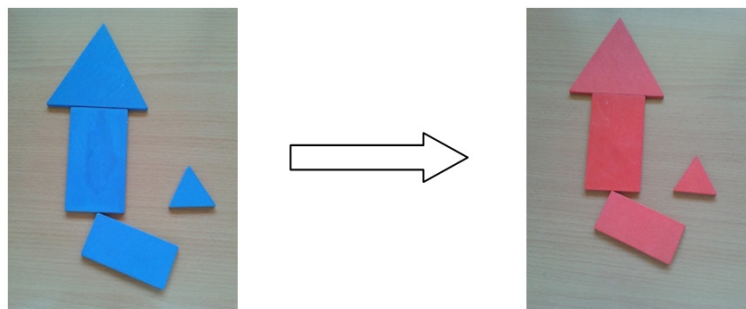


Figura 34. Representación de una correspondencia de transformación con bloques lógicos

Hacia el final del ciclo se probarán criterios más complejos para asociar los elementos de diferentes conjuntos y se completará el trabajo con representaciones gráficas de correspondencias.

En todos los casos el alumnado verbalizará los criterios de asociación que definen las correspondencias que establezcamos (ato este globo azul con la cinta azul, por ejemplo).

17. Representar gráficamente relaciones y asociaciones de elementos

Esta capacidad complementa el trabajo desarrollado en las cuatro últimas, incorporando representaciones gráficas de los diferentes conceptos estudiados, a medida que las posibilidades de los niños y las niñas lo permitan. Hemos de ser conscientes de la evolución de su motricidad fina y será, por tanto, un elemento más a considerar, pero no el único, para saber si están haciendo correctamente lo que se pide.

Cuando se trata de representar una clasificación en un folio con elementos dibujados, pueden pintar de un mismo color aquellos que pertenecen a la misma clase, o rodearlos con un diagrama como se ve en la figura 35, en la que se han clasificado algunos animales de la granja por el criterio «ser animales iguales».

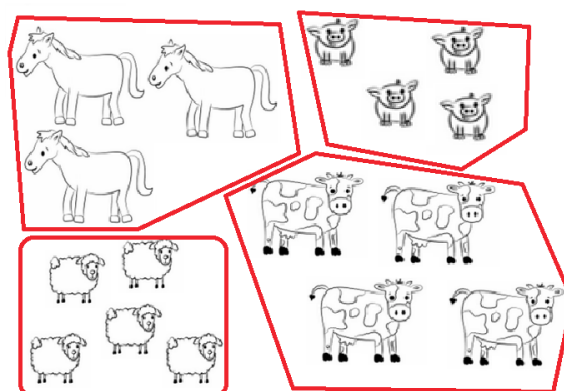


Figura 35. Representación de una clasificación con diagramas

El trabajo gráfico con series se ha comentado ya en la capacidad correspondiente.

Si se trata de representar una ordenación, podemos trabajar de tres maneras diferentes. En primer lugar, pueden recortar los dibujos y ordenarlos. Más adelante, utilizarán una línea (o flecha) para unir el primer elemento de la ordenación (el más grande, por ejemplo) con el que le sigue y cada uno con el posterior de la misma manera. Por último, y dependiendo del momento en el que nos encontremos en el trabajo con las grafías y la ordenación de los números, se pueden numerar los elementos indicando su orden por medio del que siguen los números naturales (figura 36).



Figura 36. Representación de una ordenación de grande a pequeño con flechas (izquierda) y con números (derecha)

Serán las flechas las encargadas de representar gráficamente las asociaciones entre los elementos de dos conjuntos cuando entre ellos se haya establecido cualquier tipo de correspondencia. En la figura 37 se muestra un ejemplo en el que, volviendo a trabajar con las imágenes de los animales de la granja, se ha definido una que asocia los animales iguales.

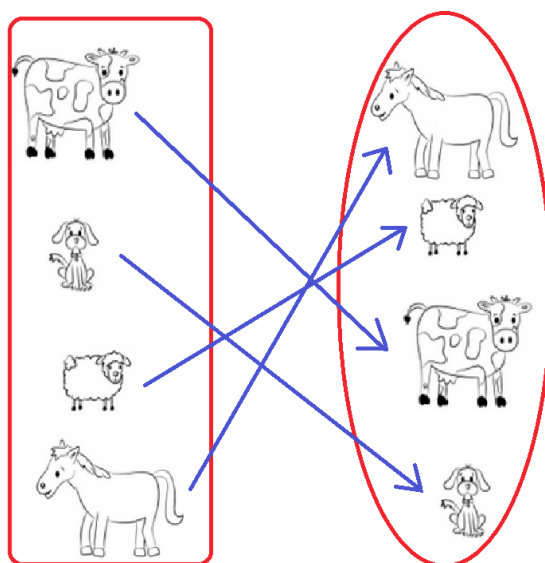


Figura 37. Representación de una correspondencia que asocia parejas de animales iguales

Los números naturales en educación infantil

1. Introducción

En este tema se trabaja la construcción del concepto de número natural a partir de la Teoría de Conjuntos, para ofrecer a los maestros y maestras de educación infantil las herramientas necesarias para introducir este concepto a los niños y las niñas, proporcionándoles así los recursos matemáticos que les ayuden a responder a las preguntas que la realidad les plantea respecto a «¿cuántos hay?» en diferentes situaciones.

Empieza con una reflexión sobre el concepto de número natural, continúa con una formalización del conjunto que forman estos números y de los sistemas de numeración, incluyendo una aproximación histórica, para finalizar con un extenso tratamiento didáctico sobre cómo introducir los primeros números naturales en el aula de infantil.

1.1. Reflexión sobre el concepto de número natural

Si la pregunta que nos hicieran fuese si sabemos qué es un número, todo el mundo podría afirmar que, efectivamente, sabe lo que es un número. Incluso nos podríamos atrever a explicarlo, pero a la hora de definirlo claramente empiezan las dificultades.

Hay muchas *definiciones* que se aproximan al concepto de número, pero ninguna de ellas es totalmente independiente:

- Entidad abstracta que representa una cantidad específica.
- Símbolos que se utilizan para representar los números: numerales.
- Elementos que forman los sistemas numéricos.

El concepto de *número* varía en las personas según la edad y la formación que tienen. Para los niños y las niñas los números indican cantidades o ubicaciones (cardinal y ordinal) o también símbolos para representarlos.

Volviendo a la pregunta ¿qué es un número?, encontraríamos posibles respuestas, por ejemplo, a la pregunta ¿qué es el número uno?, podrían aparecer: ●, 1, uno, *sonido del nombre del número*.

Analicémoslas:

- ● referente intuitivo, una marca, un símbolo, un punto... indicará una unidad, una sola cosa. Para representar el dos, harían falta dos símbolos como este: ●●
- 1, signo o guarismo que en nuestra sociedad indica una unidad, una sola cosa. Con este signo se simbolizan cantidades, se opera... La única intuición es que es un único símbolo para el uno; pero el 2, también es un símbolo único, mientras que la cantidad es dos (que corresponde a un conjunto que tiene un elemento y otro elemento); lo mismo pasaría con 3... Por lo tanto, es una representación *abstracta*.
- *uno*, nombre escrito que en nuestra lengua indica una unidad, una sola cosa. Con esta se habla, se escribe o se lee. No se opera. No es intuitivo *a priori*, porque según el idioma se escribe con una o varias letras (en catalán *u* o *un*, una o dos letras; en castellano *un* o *uno*, dos o tres letras; en inglés *one*, también tres letras...).
- *sonido del nombre del número*, se ha de identificar una palabra concreta con una cantidad, y este sonido también es diferente según el idioma en el que se hable.

A lo largo del 2.º ciclo de educación infantil (3-6 años), los niños y las niñas utilizan *procesos propios de identificación de la cantidad*. Al principio quizás no saben qué representa un número ni cómo es la cifra que le corresponde, pero saben si tienen más o menos objetos para jugar que el/la compañero/a, porque la idea de cantidad es intuitiva.

Por tanto, ¿cuál es el proceso de introducción de los números? Como en muchos otros momentos de la enseñanza, este es un proceso en espiral, al que se puede acceder desde distintos puntos. Nuestra sociedad está rodeada de cifras, de números, de palabras que significan números y cuando hablamos utilizamos los números indiscriminadamente. Por tanto, en el mismo aprendizaje natural del alumnado, aparecen números. En la escuela, se empezará por lo que resulta más intuitivo, como son las agrupaciones de elementos que indican la cantidad, a la que irán asociando poco a poco los nombres de los números. El uno contabilizará un objeto, el dos, dos objetos y así sucesivamente. Más adelante se introducirán las cifras, su grafía, y, en una fase posterior, los nombres escritos.

En el 2.º ciclo de educación infantil se introduce del 1 al 9. Además del contacto con los números que el alumnado tendrá a partir de sus experiencias en la realidad, se pueden utilizar algunos materiales didácticos como los que se muestran a continuación, con el objetivo de ayudar a los niños y las niñas a construir estos números y dominar su uso y significado.

El material *Anillas de colores* consta de una base de madera con unos pilares fijos de diferentes alturas, de anillas de colores que se han de colocar en los pilares y de unas fichas cuadradas en las que aparecen los números representados por cantidades de círculos en unos casos y por cifras en otros (figura 38).



Figura 38. Anillas de colores (fabricado por Goula)

Según el momento en el que se encuentre el alumnado, podremos utilizar solo los círculos, los círculos y las cifras o solo las cifras para asociarlas con las anillas (figura 39).

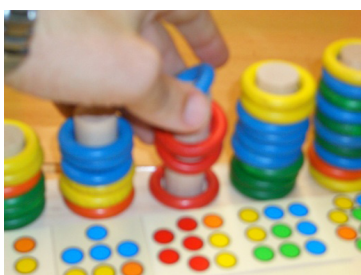


Figura 39. Uso de anillas de colores solo con círculos (izquierda) y con círculos y cifras (derecha)

Es muy intuitivo y no necesita demasiada motricidad fina. Por el contrario, no lleva los nombres de los números escritos y, como los pilares son fijos y su altura es la que corresponde a la cantidad de anillas que deben poner, los niños y las niñas pueden rellenarlos con las anillas sin reflexionar mucho sobre si es o no el número correcto de unidades. Si queremos comprobar que conocen bien los números, podemos alterar la posición de las fichas cuadradas asociándolas con pilares que no les correspondan y observar si son capaces de reunir la cantidad adecuada de anillas.

Otro material, llamado *Aprendo a contar*, está formado por fichas de plástico de dos colores que tienen impresa la grafía o el nombre de los números del 1 al 10, varillas de plástico de diez longitudes diferentes adaptadas a las cantidades y bolas de colores que se enfilan en cada una de ellas. En este material todas las piezas están sueltas y se puede montar como un rompecabezas (figura 40).



Figura 40. Piezas del material Aprendo a contar (fabricado por Lado)

Para utilizarlo hace falta una cierta motricidad fina, porque todas las piezas deben ser colocadas en su lugar y el agujero de las bolas no es muy grande (esto no ocurre en las Anillas de colores). Según el momento evolutivo del alumnado podemos usar los nombres escritos de los números o no.

En la figura 41 se muestra una secuencia gráfica de la construcción del número 6 y de la introducción de su grafía y de su nombre escrito.

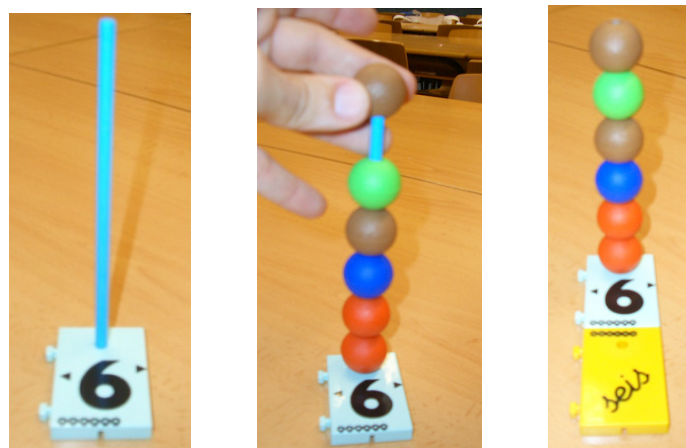


Figura 41. Secuencia de la construcción del número 6 (de izquierda a derecha)

Al principio, cada varilla se asociará, según su altura, con el número correspondiente. Más adelante podemos asociar cada varilla con diferentes números para comprobar si los conocen realmente (figura 42) y asignan adecuadamente la cantidad de bolas.



Figura 42. Varillas asociadas a los números por su altura (izquierda) y uso de la varilla del 6 con piezas del 2 (derecha)

1.2. Contextos y usos del número natural

El conjunto de los números naturales se denota como \mathbb{N} : **0, 1, 2, 3...**, y los utilizamos:

- Para contar: 5 niños y niñas en un grupo de trabajo, 3 personajes en un cuento...
- Para ordenar: la 1.^a planta de la escuela, el 3.^{er} alumno que llega a clase...
- Para medir: 84 cm de altura, en la jarra caben 4 vasos de zumo...
- Para operar: 3 nenes y 4 nenas suman 7 alumnos, me como 2 galletas de 5 y quedan 3...
- Para identificar o codificar: el teléfono de la UJI es 964 728 000, el aula 1117...

Hay funciones que el alumnado ya tiene integradas antes de saber contar, porque son intuitivas. Estas funciones (Gallego *et al.*, 2005) y el trabajo que realizaremos con objetos del entorno nos permitirán conseguir que los niños y las niñas lleguen a considerar el número natural como cardinal y como ordinal. Cardinal en el sentido de contar una cantidad de objetos y ordinal en el sentido de ordenarlos.

La definición actual de número que incluye estos dos aspectos se basa en la intuición y está relacionada íntimamente con el concepto de *conjunto y cantidad de elementos de un conjunto*. Esta formalización de la idea de número no ha estado presente siempre a lo largo de la historia y no aparece hasta el siglo XIX cuando G. Cantor define formalmente los conjuntos numéricos, el primero de los cuales es el de los números naturales. Hay otras definiciones, como la *axiomática de Peano*, pero nos centraremos en la de Cantor por estar más cerca de la mente del alumnado escolar.

2. Formalización del conjunto de los números naturales

Como paso previo al trabajo didáctico en la formación de los docentes y con la intención de fundamentarlo, consideramos necesario incluir las bases formales de la construcción del conjunto de los números naturales, para que estén al alcance de cualquier lector que las quiera consultar. Obviamente este tratamiento formal de la construcción de los números no se ha de realizar en el aula de infantil.

2.1. Definición de número natural

En el tema 1, «Desarrollo de los conceptos lógicos», hemos hablado del concepto de conjunto y de otros asociados a él como elemento, cardinal, operaciones entre conjuntos, correspondencias y aplicaciones, relaciones binarias, etc.

A partir de ellos y considerando un conjunto X formado por todos los conjuntos finitos existentes, definimos la siguiente relación binaria entre sus elementos: si

A y **B** son dos conjuntos finitos arbitrarios que pertenecen a **X**, diremos que son coordinables, equipotentes o equipolentes ($A \mathcal{R} B$) sii existe una aplicación biyectiva entre ellos.

Esta es una relación binaria de equivalencia porque cumple las propiedades siguientes:

- Propiedad reflexiva. Entre un conjunto y él mismo siempre existe la identidad como aplicación biyectiva ($A \mathcal{R} A$).
- Propiedad simétrica. Si entre los conjuntos **A** y **B** se define una aplicación biyectiva **f**, su inversa f^{-1} es una aplicación biyectiva entre **B** y **A** ($A \mathcal{R} B \rightarrow B \mathcal{R} A$).
- Propiedad transitiva. Si entre los conjuntos **A** y **B** se define una aplicación biyectiva **f**, y al mismo tiempo entre los conjuntos **B** y **C** se define otra biyección **g**, entre los conjuntos **A** y **C** queda también definida una biyección por la composición de las aplicaciones **f** y **g** anteriores ($A \mathcal{R} B$ y $B \mathcal{R} C \rightarrow A \mathcal{R} C$).

Por ser de equivalencia origina una clasificación de los elementos de **X**. Entonces definimos número natural como «la propiedad común de todos los conjuntos finitos de una clase de equivalencia determinada por esta relación de equipotencia».

Pero ¿cómo se puede concretar esa propiedad común?

La existencia de una aplicación biyectiva entre **A** y **B** nos indica que cada elemento del conjunto inicial (**A**) recibe en el conjunto final (**B**) una imagen o elemento con el que se corresponde de manera única, y cada elemento del conjunto final se asocia también de manera única con un elemento del conjunto inicial, como se ve en el ejemplo de la figura 43.

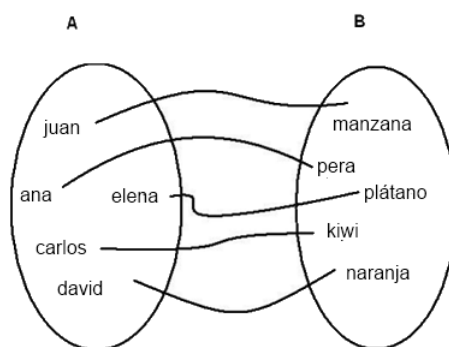


Figura 43. Representación de una aplicación biyectiva entre dos conjuntos finitos

Esta asociación uno a uno de los elementos de los dos conjuntos nos asegura que los conjuntos equipotentes, coordinables o equipolentes, por ser biyectivos entre sí, tienen el mismo cardinal y, por tanto, será el cardinal común la propiedad que estábamos concretando y que caracteriza a todos los conjuntos finitos de una misma clase de equivalencia. Así, el número cero representa la clase de equivalencia

del conjunto vacío, el número uno a la clase de los conjuntos equipotentes, por ejemplo, al conjunto $A = \{\text{el Sol}\}$ (si nos permitimos usar *un* o *uno* en la definición de uno, se puede redactar: el número uno representa la clase de equivalencia de los conjuntos con un elemento), el dos representaría a todos los conjuntos equipotentes, por ejemplo, al conjunto $A = \{\text{la Tierra, la Luna}\}$ (si aceptamos usar *dos* en la definición del dos, se puede redactar: el número dos representa la clase de equivalencia de los conjuntos con *dos* elementos), etc. En general, un conjunto A pertenece a la clase del número natural m si $\text{card}(A) = m$.

Una vez queda claro que todos los conjuntos equipotentes, coordinables o equipotentes tienen el mismo cardinal, con uno que utilicemos para representarlos a todos nos bastaría. Es decir, todos los conjuntos con 5 elementos contienen la misma información por lo que se refiere al cardinal; por tanto, con un conjunto que los represente hay suficiente. Ocurre lo mismo para todos los números naturales y, por tanto, con un solo conjunto finito podemos representar cualquiera de estos números.

2.2. Operaciones en \mathbb{N}

Sean a y b dos números naturales y A y B dos conjuntos finitos, arbitrarios y disjuntos, de manera que $a = \text{card}(A)$ y $b = \text{card}(B)$. Se define la adición de a y b , como el cardinal de la unión de A y B . Es decir:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \wedge \forall A, B \in X / a = \text{card}(A), b = \text{card}(B) \wedge A \cap B = \emptyset: a + b = \text{card}(A \cup B).$$

A partir de las propiedades de las operaciones entre conjuntos se puede demostrar que la adición de números naturales cumple las propiedades conmutativa y asociativa.

Sean a y b dos números naturales y A y B dos conjuntos finitos, arbitrarios, de manera que $a = \text{card}(A)$ y $b = \text{card}(B)$. Se define la multiplicación de a y b , como el cardinal del producto cartesiano de A y B . Es decir:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \wedge \forall A, B \in X / a = \text{card}(A), b = \text{card}(B): a \times b = \text{card}(A \times B).$$

A partir de las propiedades de las operaciones entre conjuntos se puede demostrar que la multiplicación de números naturales cumple la propiedad conmutativa, asociativa y distributiva respecto de la adición.

2.3. Orden en \mathbb{N}

Si en este conjunto definimos la relación «ser menor o igual» de la siguiente manera:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: a \leq b \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / a + n = b$$

se puede comprobar que es una relación binaria de orden total porque cumple las propiedades siguientes:

- Propiedad reflexiva. Cualquier número natural siempre es menor o igual que él mismo, porque $\exists 0 \in \mathbb{N} / a + 0 = a$ ($a \leq a$)
- Propiedad antisimétrica. Si un número natural es menor o igual que otro y a la vez el segundo es menor o igual que el primero, necesariamente los dos números son iguales. Es decir,

$$\forall a, b \in \mathbb{N} / a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / a + n = b \wedge \exists m \in \mathbb{N} / b + m = a \rightarrow$$

$$(b + m) + n = b \rightarrow m + n = 0 \rightarrow m = 0 = n \rightarrow a = b \quad (a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b)$$
- Propiedad transitiva. Si un número natural es menor o igual que otro y a la vez este es menor o igual que un tercero, entonces el primero es menor o igual que el tercero. Es decir:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} / a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / a + n = b \wedge \exists m \in \mathbb{N} / b + m = c \rightarrow$$

$$(a + n) + m = c \rightarrow a + (n + m) = c \rightarrow a \leq c \quad (a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c)$$
- Propiedad conexa. Dados dos números naturales cualesquiera, o el primero es menor o igual que el segundo o el segundo es menor o igual que el primero. Es decir, $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \leq b \vee b \leq a$. Para demostrar esta propiedad tendremos que contemplar dos casos:
 1. Si $a = b$, es evidente que $a \leq b \vee b \leq a$
 2. Si $a \neq b$, existirá siempre otro número natural que sumado a uno de estos dará como a resultado el otro, es decir:

$$\exists n \in \mathbb{N} / a + n = b \vee b + n = a \rightarrow a \leq b \vee b \leq a$$

Diremos entonces que \mathbb{N} , con la relación anterior, es un conjunto *totalmente ordenado* y no habrá ninguna duda a la hora de establecer si un número natural es mayor, menor o igual que otro.

Aunque hemos definido la relación de orden «ser menor o igual» con el símbolo \leq , se podría definir de manera semejante la relación «ser mayor o igual» con el símbolo \geq . En cualquiera de los casos, si eliminamos la posibilidad de igualdad entre los números, las relaciones definidas se convierten en otras de orden estricto que se llaman «ser menor estrictamente» o «ser mayor estrictamente» y se representan por los símbolos $<$ y $>$, respectivamente.

En este momento empiezan a tener más sentido las palabras *cardinal* y *ordinal*. El aspecto cardinal del número natural será el que se refiere a las cantidades, es decir, a los cardinales de los conjuntos, y el ordinal será el que designa el orden y establece comparaciones entre los cardinales de los conjuntos para ordenarlos.

3. Sistemas de numeración

Aunque la construcción del sistema de numeración decimal no forma parte en sentido estricto de los contenidos numéricos a desarrollar en el aula de infantil, consideramos importante que los y las docentes conozcan la evolución y la ampliación del campo numérico, así como las regularidades que enmarcan el funcionamiento de su representación. Para atender este interés presentamos los dos apartados siguientes que se refieren a la evolución histórica y al funcionamiento de los sistemas de numeración (véase 3.2 de este tema).

3.1. Evolución histórica

No sabemos con seguridad cuándo el ser humano empezó a necesitar un sistema de escritura de números, es decir, un sistema de numeración, pero parece seguro que los primeros instrumentos con los que se empezó a contar fueron los dedos de la mano (Ifrah, 2001). Eso implicaría que las primeras representaciones numéricas se hicieran tomando como referente el cinco y, posteriormente, se refirieran al diez por el hecho de que se podían utilizar los dedos de ambas manos. Parece que la humanidad usaba la cantidad «diez» como referente cuando el lenguaje hablado se consolidó. Por lo menos, es lo que podemos deducir, en el ámbito indoeuropeo, de nuestro sistema numérico y del nombre de algunos números como diez, en latín *decem*; once, en latín *undecim* (uno más diez); doce, en latín *duodecim* (dos más diez). Incluso se podría pensar en una base (véase 3.2 de este tema) veinte, contando los dedos de los pies y las manos (en latín *viginti*).

No obstante lo anterior, cuando aumentó la necesidad de representar números más grandes, era posible escribir grupos de cinco rayas (IIII) hasta llegar a la cantidad requerida. Un ejemplo de este método es un hueso de lobo encontrado en la República Checa donde aparecen 55 incisiones, bastante profundas, divididas en grupos de cinco. Este hueso tiene unos 35.000 años de edad, aproximadamente. Ni que decir tiene que este sistema (de *representación simple*) primitivo y antiguo no constituía una herramienta eficaz para un cálculo desarrollado.

A partir del III milenio a. C., los egipcios utilizaron un sistema numérico (de *agrupamiento múltiple*) procedente de su escritura jeroglífica. Este sistema de base 10 utilizaba signos diferentes para las unidades, las decenas, las centenas etc. En la figura 44 se ve como una determinada potencia de diez podía tener representaciones gráficas muy parecidas pero no idénticas.

1	1
10	10
100	100
1 000	1 000
10 000	10 000
100 000	100 000
1 000 000	1 000 000

Figura 44. Símbolos en la escritura jeroglífica egipcia (Ifrah, 1988)

Permitía escribir números grandes y ofrecía una gran innovación con respecto a los antiguos sistemas. Hay que decir, sin embargo, que el procedimiento de composición consistía en repetir los símbolos de la misma manera que el hombre primitivo repetía las rayas. En la escritura jeroglífica se escribía indistintamente de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. Los signos numéricos modificaban su orientación en función de estos sentidos de la escritura. En la figura 45, donde se representa el número 2.425, se ve como la orientación de los símbolos es diferente a la de la figura 44.

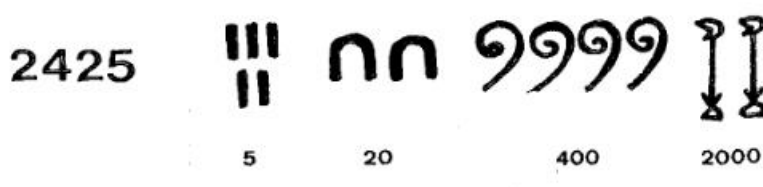


Figura 45. Escritura jeroglífica del número 2.425 (Ifrah, 1988)

Los mismos egipcios, poco después, utilizaron un sistema de numeración más moderno y más práctico, relacionado con la escritura hierática. El sistema continuaba siendo decimal, pero no era necesario repetir constantemente los caracteres, sino que se habían introducido unos nuevos que indicaban cuántas veces se repetía cada símbolo (sistema de *agrupamiento multiplicativo*).

Este cambio, que encontramos en el *papiro Rhind*, también denominado de Ahmes, (s. XVII a. C.), conservado en el British Museum, nos muestra un aspecto que habría de ser fundamental para nuestros sistemas de numeración: la no necesidad de repetir los símbolos.

El sistema de numeración que utilizaban los griegos alrededor del 600 a. C., concretamente los atenienses, cifraba las cantidades con la primera letra del nombre del número correspondiente, era un sistema acrofónico.

Las unidades hasta el 4 se representaban por rayas, el número 5 se representaba por la letra PI mayúscula por ser PENTE el nombre griego de esta cantidad, para el 10 se utilizaba la letra DELTA mayúscula por ser DEKA el nombre de este número, etc. También se crearon símbolos mixtos a partir del cinco: si se añadía el símbolo del diez inscrito simbolizaba el 50, si era el del 100, 500, si el del mil, 5.000 (figura 46).

1	I	100	H	10.000	M
2	II	200	HH	20.000	MM
3	III	300	HHH	30.000	MMM
4	IIII	400	HHHH	40.000	MMMM
5	Γ	500	Ϟ	50.000	Ϟ
6	ΓI	600	ϞH	60.000	ϞM
7	ΓII	700	ϞHH	70.000	ϞMM
8	ΓIII	800	ϞHHH	80.000	ϞMMM
9	ΓIIII	900	ϞHHHH	90.000	ϞMMMM
10	Δ	1.000	X		
20	ΔΔ	2.000	XX		
30	ΔΔΔ	3.000	XXX		
40	ΔΔΔΔ	4.000	XXXX		
50	Ϟ	5.000	Ϟ		
60	ϞΔ	6.000	ϞX		
70	ϞΔΔ	7.000	ϞXX		
80	ϞΔΔΔ	8.000	ϞXXX		
90	ϞΔΔΔΔ	9.000	ϞXXXX		

Figura 46. Representaciones numéricas en la escritura acrofónica griega (Ifrah, 1988)

En la figura 47 se muestra un ejemplo de la representación del número 7.699, usando las cifras de la tabla anterior.

Ϟ XX Ϟ H Ϟ ΔΔΔΔ Γ IIII

5000 2000 500 100 50 40 5 4

Figura 47. Escritura acrofónica del número 7.699 (Ifrah, 1988)

Poco después, este sistema numérico fue sustituido por otro que utilizaba todas las letras del alfabeto griego (acompañadas de una barra horizontal en la parte superior cuando representaban números) y algunos otros símbolos procedentes del alfabeto fenicio (figura 48).

A	α	alpha	1	I	ι	iota	10	P	ρ	ro	100
B	β	beta	2	K	κ	kappa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gamma	3	Λ	λ	lambda	30	T	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	M	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
E	ε	epsilon	5	N	ν	nu	50	Φ	φ	phi	500
Ζ	ζ	digamma	6	Ξ	ξ	ksi	60	X	χ	khi	600
Z	ζ	dzeta	7	O	σ	omicron	70	Ψ	ψ	psi	700
H	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	omega	800
Θ	θ	thêta	9	Ϟ	ϙ	qoppa	90	Ϟ	ϙ	san	900

Figura 48. Numeración alfabética griega (Ifrah, 1988)

Con este sistema se podrían cifrar los números que van del uno al novecientos noventa y nueve. Para escribir los millares añadían una coma en la parte izquierda superior de la letra; así una ‘α indicaba mil, y una ‘i indicaba diez mil. Con este sistema se podía escribir hasta el novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.

Siguiendo el ejemplo griego, los romanos utilizaran también las letras del alfabeto para escribir los números de acuerdo con los valores de la figura 49.

uno	I	diez	X	cien	C
dos	II	veinte	XX	doscientos	CC
tres	III	treinta	XXX	trescientos	CCC
cuatro	IV	cuarenta	XL	cuatrocientos	CD
cinco	V	cincuenta	L	quinientos	D
seis	VI	sesenta	LX	seiscientos	DC
siete	VII	setenta	LXX	setecientos	DCC
ocho	VIII	ochenta	LXXX	ochocientos	DCCC
nueve	IX	noventa	XC	novecientos	CM

Figura 49. Numeración romana

El principio de equivalencias era muy semejante al griego, de manera que la unidad era simbolizada por una I, y se podía repetir al principio hasta cuatro veces IIII (4). La unidad siguiente era V, que simbolizaba el 5. Más adelante se introdujo la regla según la cual solo se permite repetir cualquier cifra hasta tres veces. Así, para expresar el número 4, se restó una unidad de la cifra siguiente IV (4). En general, cuando dos cifras van juntas, la inferior se suma a la superior si va a la derecha (VI) y se resta si va a la izquierda (IV), teniendo en cuenta que las únicas cifras que restan son: I delante de V y X, X delante de L y C, y C delante de D y M (mil). Así, por ejemplo, el 999 se escribía CMXCIX.

El mecanismo más utilizado para escribir números superiores al mil era poner una raya sobre cualquier símbolo, que indicaba que este se debía multiplicar por mil; el dos mil, por ejemplo, se escribía, \overline{II} , y el diez mil, \overline{X} . Así, por ejemplo, el 3.749 se escribía bien MMMDCCXLIX, o bien $\overline{IIIDCCXLIX}$.

Pero el sistema de numeración más moderno y práctico nació en la India alrededor del siglo III a. C. Conservaba la base decimal y el carácter de agrupamiento multiplicativo del sistema egipcio. Hacia el siglo V de nuestra era se incorporó a este sistema un cambio fundamental respecto de los anteriores, que consistía en la introducción de un guarismo para escribir la cifra cero, que indicaba la ausencia de algún orden de unidades en el número, obteniendo así un sistema de numeración donde el valor de cada cifra dependía de la posición que ocupaba en la representación del número (*sistema de numeración posicional: de agrupamiento multiplicativo, con valor posicional de las cifras y con uso de la cifra cero*).

Estas cifras hindúes fueron extendiéndose y adoptaron formas diversas en diferentes lenguas. Los árabes adoptaron los sistemas de escritura numérica que habían aprendido de los griegos y los hindúes y utilizaron ambos. Pero introdujeron en Occidente, alrededor del siglo x, el sistema de numeración que triunfaría y se impondría a los otros, y que recibió el nombre de numeración arábica o indoarábica, las cifras iniciales de la cual eran las que se representan en la figura 50.

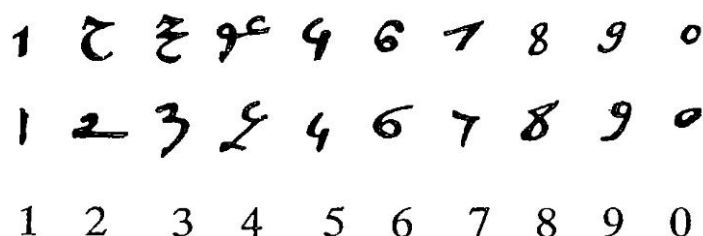


Figura 50. Cifras árabes (Ifrah, 1988)

En el mundo cristiano se adoptó este sistema hindú y árabe porque ofrecía grandes ventajas respecto del romano y, aunque se hizo público en el siglo XIII al editarse el *Liber abaci* de Leonardo de Pisa *Fibonacci*, no se utilizó de manera normalizada hasta el siglo XV, en el que la imprenta hizo posible que su conocimiento llegase a una franja de población mucho mayor que al principio. Las cifras del sistema hindú han evolucionado a lo largo del tiempo hasta llegar a nuestros días. En la figura 51 se ilustran los primeros pasos de esta evolución.

Fechas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
siglo XII	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
siglo XIII	1	7	3	2	4	6	8	9	0	٠
siglo XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
siglo XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
hacia 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Figura 51. Evolución de las cifras árabes en Europa (Ifrah, 1988)

Otras civilizaciones o sociedades han tenido sistemas de numeración diferentes. Algunos ejemplos de los cuales son el chino en el 1500 a. C., el babilónico en el siglo XIII a. C. y el maya en el siglo XII aproximadamente. Se puede encontrar amplia información sobre estos y otros sistemas de numeración en Ifrah (1988 y 2001).

3.2. Definición y tipos

Un Sistema de Numeración es un conjunto de normas y convenios para leer y escribir números utilizando la menor cantidad de símbolos posible.

Habría que volver a la historia, otra vez, para entender cuestiones importantes de los sistemas de numeración y la depuración que han sufrido por causas de economía de la escritura, de dificultad y, a veces, religiosas.

Cuando el ser humano empezó a contar usó los dedos, piedras, marcas en bastones, nudos en una cuerda y otras formas para pasar de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece, se hace necesario un sistema de representación más práctico. En diferentes partes del mundo y en épocas distintas se llegó a la misma solución: cuando se consigue un determinado número de unidades (*de primer orden*) se agrupan y se hace una marca diferente que representa este grupo (*unidad de segundo orden*). A la cantidad de unidades de un orden necesaria para obtener una unidad del orden siguiente se le llama base del sistema de numeración. Se continúa añadiendo unidades de primer orden hasta que se vuelve a conseguir por segunda vez el número anterior y se añade otra marca de la segunda clase. Y así, se continúa formando unidades de segundo orden hasta llegar a un número de ellas igual a la base. Entonces se agrupan estas unidades de segundo orden y se introduce una marca diferente para representar esta nueva unidad (*de tercer orden*). Procediendo de manera semejante y de forma sucesiva se van construyendo los diferentes órdenes superiores de unidades.

La base que más se ha utilizado a lo largo de la historia es la base 10, según todas las apariencias, porque este es el número de los dedos de las manos del ser humano. Hay alguna excepción notable, como la numeración babilónica, que usaba 10 y 60 como bases, y la numeración maya, que usaba 20 y 5, aunque con alguna irregularidad. Desde hace 5.000 años, la gran mayoría de las civilizaciones han contado en unidades, decenas, centenas, millares, etc., es decir, de la misma manera que continuamos haciéndolo hoy.

No obstante, la forma de escribir los números ha sido muy variada y muchos pueblos han visto impedido su avance científico por no disponer de un sistema de numeración que permitiera utilizar unos procedimientos eficaces para el cálculo. Casi todos los sistemas utilizados representan con exactitud los números naturales, aunque en algunos se pueden confundir unos números con otros (en el del sistema egipcio de agrupamiento multiplicativo, por ejemplo). Muchos de ellos no son capaces de representar grandes cantidades y otros requieren un número de símbolos tan grande que los hace poco prácticos. Además, no permiten, en general, efectuar operaciones tan sencillas como la multiplicación y requieren procedimientos muy complicados que solo estaban al alcance de unos pocos iniciados. Por lo que respecta a la división, es mucho más grave, ya que no existían reglas para poder hacerla. De hecho, cuando se empezó a utilizar en Europa el sistema de numeración actual, los *abaquistas*, profesionales del cálculo, se opusieron con las razones más peregrinas, entre las cuales, por ejemplo: «Siendo el cálculo algo complicado en sí mismo, debería ser un método diabólico aquel que permitiera efectuar las operaciones de manera tan sencilla».

El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido en Europa por los árabes. Del origen indio del sistema hay suficientes pruebas en documentos indios y árabes. Leonardo de Pisa (*Fibonacci*), fue uno de los introductores del nuevo sistema en la Europa de 1202. El gran mérito de los indios fue la utilización del cero con valor numérico para ocupar diferentes posiciones en la representación de los números, lo cual evita confusiones y permite un sistema en el que con solo diez símbolos se puede representar cualquier número, aunque sea muy grande, y simplificar la forma de efectuar las operaciones.



Figura 52. Grabado de principios del siglo XVI que representa el triunfo de los algoritmos sobre los ábacos. Los algoristas, utilizando las 9 cifras y el cero, se imponen a los abaquistas, ya que son capaces de hacer más rápidamente las operaciones aritméticas. En segundo plano, la dama Aritmética, con un vestido adornado con cifras, muestra con la mirada cuáles son sus preferencias (Ifrah, 1988)

La introducción de este sistema de numeración que ahora utilizamos como si hubiera existido desde siempre no fue fácil. En el siglo XVI, trescientos años después de su introducción en Europa por Fibonacci, aún se hacían competiciones entre *abaquistas*, que utilizaban el ábaco, y *algoristas*, que hacían las cuentas más o menos como nosotros ahora (figura 52). Los ábacos resistieron, a pesar de todo, hasta el siglo XX, cuando aún se podían encontrar en algunos bancos, comercios, etc., sobre todo de países orientales.

3.2.1. Sistemas de numeración aditivos

Para ver cómo funciona la representación numérica en un sistema aditivo, consideremos el sistema jeroglífico egipcio. Para cada unidad se escribe un trazo vertical, para cada decena un símbolo en forma de arco y para cada centena, millar, decena y centena de millar y millón, un jeroglífico específico. Así, para escribir 754 utilizaban 7 jeroglíficos de centenas, 5 de decenas y 4 trazos. De alguna manera, todas las unidades están físicamente presentes.

Los sistemas aditivos son aquellos que acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas, etc., necesarios para completar el número. Una de sus características es, por tanto, que se pueden poner los símbolos en cualquier orden, aunque, en general, es preferible una disposición determinada. Cada cifra tiene un valor propio que no depende del lugar que ocupa y se llaman aditivos porque, para conocer un número, se tiene que hacer una adición. Como ya se ha comentado, las dificultades para representar números grandes y las complicaciones que había a la hora de operar, hicieron que no prosperaran.

3.2.2. Sistemas de numeración posicionales

Estos sistemas se basan en el principio del valor relativo, es decir, cada cifra representa valores diferentes dependiendo de la posición que ocupe en la expresión del número. El ejemplo por excelencia sería el Sistema de Numeración Decimal (a partir de ahora SND), pero hay otros que también lo utilizan y que se explicarán más adelante.

La base (véase 3.2 de este tema) supone un punto de inflexión en la colocación de las cifras. Es decir, si un sistema de numeración posicional tiene base ***b*** significa que «***b*** unidades de cualquier orden forman una unidad de orden inmediato superior», como se ha comentado anteriormente. La base representa también la cantidad de cifras que el sistema utiliza, es decir, ***b*** es el número de símbolos diferentes permitidos en un sistema de numeración posicional para escribir los números.

Analicemos el SND. La base será **10** y se utilizan como cifras 0, 1, 2, 3..., 9. Para representar cantidades inferiores a 10, unidades primer orden o unidades, se utiliza una sola cifra.

Al llegar a la base, es decir, a la cantidad que obtenemos al añadir 1 al 9, el sistema utiliza el criterio posicional y necesita dos cifras para representar un número en el que hay un grupo y ninguna unidad suelta. Cada uno de estos grupos formados por 10 unidades se denomina decena o unidad de segundo orden. Para expresar *doce*, por ejemplo, se escribe 12. Utilizamos dos cifras; la que se escribe más a la izquierda, el 1, es la cifra de las decenas, mientras que el 2 es la cifra de las unidades. Pero, en el fondo, estamos escribiendo:

$$1 \times 10 + 2 = 12.$$

Tomando otro ejemplo, 72: $7 \times 10 + 2 = 72$.

De la misma manera, al pasar al escalón siguiente, la centena, se tiene que recurrir a una nueva posición, a la izquierda de las anteriores, para escribir cifras que indican grupos de 10 decenas, por ejemplo 325: $3 \times 100 + 2 \times 10 + 5 = 325$. Y así sucesivamente.

Podríamos poner muchos ejemplos, 8.795: $8 \times 1.000 + 7 \times 100 + 9 \times 10 + 5 = 8.795$. Si la cantidad es muy grande, representamos el uno seguido de ceros, utilizando potencias de 10:

$$9 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10 + 2 = 9.605.032.$$

Esta manera de representar los números se denomina *descomposición polinómica*. Hemos de resaltar que cuando en un número no existen unidades de un determinado orden, se coloca un cero en la posición correspondiente, sin embargo, en la descomposición polinómica, no aparece. Simplemente, en el ejemplo anterior, los sumandos que representarían 0×10^4 o 0×10^2 , se obvian.

En las unidades no hace falta poner potencia de 10, porque sería con exponente 0, ya que $10^0 = 1$. Tampoco hay que explicitar el exponente de la potencia 10^1 ; por tanto, $25 = 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ lo escribimos $25 = 2 \times 10 + 5$.

El funcionamiento del SND se reproduce en cada sistema posicional sea este de la base que sea, exceptuando la utilización del punto o cualquier otra marca para separar los bloques de tres cifras, los nombres de los diferentes órdenes de unidades (es decir, unidades, decenas, centenas..., queda reservado únicamente para el SND) y la manera de leer los numerales (por ejemplo, 132 se lee «ciento treinta y dos», mientras que $132_{(4)}$ se lee «uno, tres, dos en base cuatro»).

Si utilizamos diferentes sistemas de numeración para representar un número obtenemos varias expresiones para el mismo que se llaman numerales. Así, por ejemplo: 7, $21_{(3)}$, VII..., son numerales que corresponden a la cantidad de días de una semana. Como generalmente el trabajo con números y operaciones se hace referido a un solo sistema de numeración, se asimila la palabra numeral a la palabra número y se utilizan indistintamente.

Desarrollamos a continuación algunos ejemplos de sistemas posicionales en otras bases.

Sistema de numeración en base 5

Es un sistema que se ha utilizado a lo largo de la historia por el hecho de que 5 es el número de los dedos de una mano. Utiliza las cifras 0, 1, 2, 3 y 4, y se cambia de orden de unidades añadiendo una cifra a la izquierda del numeral, cuando se llega a un agrupamiento de 5 unidades de cualquier orden (por lo que nunca debe aparecer el valor de la base entre las cifras de un número, ni ninguna superior a ella).

Cuando tenemos expresada una cantidad en base 5, podemos saber el numeral que le corresponde en el SND a partir de unas sencillas operaciones de adición y multiplicación. Supongamos que el número, escrito en base 5, es $23401_{(5)}$. Si queremos saber cuál es su valor en el SND, habrá que desarrollar su descomposición polinómica en la base 5 y realizar las operaciones que en ella se indiquen:

$$23401_{(5)} = 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 1 = 2 \times 625 + 3 \times 125 + 4 \times 25 + 1 = 1.726.$$

El papel de las potencias de 10 en el SND, en este momento, lo hacen las potencias de 5.

Recíprocamente, también se puede pasar un numeral expresado en el SND a un sistema de base 5. Utilizando los mismos números de antes, supongamos que queremos escribir en base 5 el número 1.726. Numéricamente, el procedimiento que se debe seguir consiste en dividir por 5 el 1.726 y, sucesivamente, los diferentes cocientes que obtenemos en cada división hasta llegar a un cociente menor que 5, ordenando a continuación los resultados de las diferentes divisiones. En el numeral que buscamos, el último cociente será la cifra de las unidades de orden más alto y los restos de las divisiones, colocados en orden inverso al de su obtención, serán las cifras de los siguientes órdenes descendentes.

$$\begin{array}{r}
 1.726 \overline{) 5} \\
 1 \quad 345 \overline{) 5} \\
 \quad 0 \quad 69 \overline{) 5} \\
 \quad \quad 4 \quad 13 \overline{) 5} \\
 \quad \quad \quad 3 \quad 2
 \end{array}$$

$$1.726 = 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 0 \times 5 + 1 = 23401_5$$

Manipulativamente, es como si tuviéramos 1.726 piezas sueltas y lo que se nos pide es hacer montones de 5 piezas, después de 5 montones, a continuación de 5 montones de 5 montones, y así mientras podamos, ordenando los resultados obtenidos en cada tipo de agrupamiento de manera análoga al caso numérico.

Sistema de numeración en base 2

Es un sistema que se utiliza mucho en la actualidad en informática y en tecnología. Cualquier información se registra con ceros y unos.

Utiliza las cifras 0 y 1 y se cambia de orden de unidades añadiendo una cifra a la izquierda del numeral cuando se llega a un agrupamiento de 2 unidades de cualquier orden.

Siguiendo un proceso semejante al descrito para la base 5, si tomamos el 100 y queremos pasarlo a base 2, dividimos sucesivamente por dos hasta obtener un cociente menor que este número y después ordenamos las cifras. Así:

$$\begin{array}{r}
 100 \overline{) 2} \\
 0 \quad 50 \overline{) 2} \\
 \quad 0 \quad 25 \overline{) 2} \\
 \quad \quad 1 \quad 12 \overline{) 2} \\
 \quad \quad \quad 0 \quad 6 \overline{) 2} \\
 \quad \quad \quad \quad 0 \quad 3 \overline{) 2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

$$100 = 1100100_2$$

Para averiguar el valor de esta expresión en base 10, escribimos la descomposición polinómica correspondiente y realizamos los cálculos:

$$1100100_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^2 = 64 + 32 + 4 = 100.$$

Sistema de numeración duodecimal

En el siglo XVIII, el naturalista francés Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), propuso la adopción del sistema *duodecimal*, de base doce, que ya se conocía de la antigüedad, para aplicarlo a las unidades de medida (Ifrah, 1988).

La razón es fácil de comprender: el 10 es un número muy grande para la escasa cantidad de divisores enteros que tiene. Descartando los obvios 1 y 10, solo es divisible por 2 y por 5. En cambio el doce, un poco más grande, tiene más divisores. Además del 1 y el mismo 12, encontramos el 2, el 3, el 4 y el 6. Estos divisores eran importantes por dos motivos: fraccionar la cantidad de mercancías y el precio de las unidades de medida de los productos; así, calcular precios y devolver dinero era una tarea más sencilla. La costumbre que hay hoy de contar las mercancías por docenas y de utilizar en algunos países unidades de medida que se relacionan de doce en doce (un pie, 12 pulgadas; un chelín, 12 peniques; etc.) tiene el origen en este sistema.

Sistema de numeración sexagesimal

Este sistema es heredado de los babilonios y los sumerios. La base es 60 y en la actualidad se continúa utilizando para medir el tiempo y los ángulos. Se puede considerar que se ha mantenido hasta nuestros días por la importancia que tuvieron los cálculos astronómicos y trigonométricos de los matemáticos antiguos. Igual que el sistema de numeración duodecimal, la gran cantidad de divisores que tiene el 60 (es el menor número que se puede dividir al mismo tiempo por 2, 3, 4, 5 y 6) lo hacía óptimo para este tipo de cálculos.

En la actualidad, este sistema funciona únicamente con tres órdenes de unidades: segundos, minutos y horas o grados, según se esté midiendo tiempo o ángulos. De esta manera, 60 segundos (1.º orden) harán 1 minuto (2.º orden) y 60 minutos harán o bien una hora, o bien un grado (3.º orden). A partir de este orden, las dos magnitudes han evolucionado de manera diferente para construir las nuevas unidades. Así, en el caso del tiempo, los días, las semanas, los meses, los años, etc., ya no se han formado agrupando 60 unidades del orden anterior. En el caso de la medida de ángulos, no hay unidad de orden superior al grado, pues el ángulo recto, de 90°, el llano, de 180° y el completo, de 360°, no se han formado agrupando 60 unidades del orden anterior.

La nomenclatura que se usa en este sistema es diferente de la de los otros sistemas de numeración y representa separadamente las cantidades que corresponden a cada uno de los órdenes del número, utilizando para ello las cifras del sistema de numeración decimal. Si la que se mide es el tiempo o son ángulos, se utilizan

formas diferentes de expresar los órdenes de las unidades. En el caso del tiempo, escribiremos *h* para indicar las horas, *min* para indicar los minutos y *s* para indicar los segundos, por ejemplo, 5 h 15 min 43 s. Para el caso de la medida de ángulos, escribiremos ° para indicar los grados, ' para indicar los minutos y '' para indicar los segundos, por ejemplo 35° 42' 33''.

Pasar una expresión numérica del sistema de numeración decimal al sistema de numeración sexagesimal, o al revés, significa poder expresar una misma cantidad en los dos sistemas de numeración o a partir de una expresión llegar a la otra. Lo haremos utilizando la proporcionalidad, es decir, expresando con proporciones las equivalencias entre los decimales y las agrupaciones de 60 (minutos o segundos).

De manera cotidiana, es necesario evitar interferencias incorrectas entre el sistema decimal y el sistema sexagesimal. Así:

- Cinco horas y media no son 5,30 h; son 5,5 h o bien 5 h 30 min
- Tres cuartos de hora no son 0,45 h; son 0,75 h o bien 45 min
- Un cuarto de hora no es 0,15 h; es 0,25 h o bien 15 min

4. Los números naturales en el aula de infantil

4.1. Consideraciones previas

Cuando el alumnado de educación infantil empieza su escolarización no es la primera vez que tienen acceso a los números, hecho que debemos tener muy presente. La cotidianidad con la que el número se presenta en nuestro medio, sea hablado o sea escrito, en cualquiera de las diferentes manifestaciones de comunicación que establecemos, hace que sea habitual en su consciente, desde edades muy tempranas, la presencia de unos signos, grafías o guarismos que explican cosas que pasan a su alrededor.

¿Quiere esto decir que hay una idea formada dentro de ellos y ellas de lo que significan los números? Seguramente no, y esa es la tarea que hemos de desarrollar en la educación infantil: que el número sea entendido como la herramienta matemática que las personas han ideado para representar, simbolizar, nombrar las cantidades y para ordenarlas. Eso en un primer momento. Es evidente que hay más usos del número natural, pero estas dos funciones son el principal objetivo del tema. Estamos hablando de las funciones cardinal y ordinal, que seguramente están incorporadas de manera intuitiva en el pensamiento de los niños y las niñas antes de entrar en la escuela, «Tengo más juguetes que tú» o «He acabado el primero». Estas dos ideas podemos considerarlas como punto de partida a la hora de trabajar la numeración en educación infantil.

Sobre los contenidos, si la pregunta es «¿qué se hace de 3 a 6 años en relación al bloque de números?», la respuesta es clara «del 0 hasta el 9». Tan simple como parece, puede llegar a ser bastante complicada. No por el trabajo que haya que

desarrollar en el aula, lo difícil puede resultar tener la seguridad de que el binomio cantidad-número está perfectamente asumido hasta el nueve, así como su orden. Por lo menos debemos plantearnos como objetivo *tener esta seguridad*. No olvidaremos reflexionar sobre el hecho de que la cantidad es una noción independiente de las características sensoriales o de las posiciones de los objetos a los que se refiere (y así cinco mesas es la misma cantidad que cinco hormigas, y no nos dejaremos confundir por nada ajeno a la mencionada cantidad). También debemos trabajar con atención las grafías de estos números, porque la habilidad del trazo no está totalmente desarrollada en el alumnado y la representación gráfica de los números no empieza siendo «de imprenta», es una grafía más cotidiana y se debe observar por dónde se empieza a escribir un número y con qué orientación, para ayudarles a conseguir una representación clara de los números.

El hecho de trabajar del 0 al 9 no significa que no puedan ver en educación infantil números superiores al nueve y con más cifras. De hecho al pasar lista, por ejemplo, o al mirar la fecha en el calendario ya ven números más altos. En estos casos, la aproximación que hacen al número se basa solo en su dibujo y no en el valor o significado que tienen las cifras que lo componen. Dejaremos el estudio de la formación de la decena y de la construcción del SND para educación primaria. Entonces será el momento de introducir un nuevo concepto y una nueva forma de proceder al trabajar los números, la agrupación de diez en diez, que resolverá otro problema que no es el de *contar*, sino el de aclararnos al *representar* los números cuando son muchos los elementos considerados.

Y todo ello sin olvidar que la numeración, como parte de las matemáticas, tiene su punto de partida y de llegada en la realidad y que nuestro trabajo matemático en el aula será significativo en la medida en que lo contextualizamos socioculturalmente y lo integramos en un trabajo globalizado que no deje como compartimento estanco cualquier tipo de saber.

4.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil

Cómo establecer los primeros pasos de una manera secuencial y adecuada en la educación infantil respecto de los números naturales será el objetivo del tema, que contribuirá a desarrollar en el alumnado las siguientes capacidades:

1. Establecer comparaciones entre cantidades de objetos separados y expresar los resultados con la ayuda de cuantificadores.
2. Comparar cantidades de objetos separados con la ayuda de los aspectos cuantitativos de las correspondencias entre conjuntos.
3. Conocer los diez primeros números naturales a partir de la experiencia con conjuntos de objetos.
4. Formar y reconocer conjuntos que tengan el mismo número de elementos que uno dado.
5. Clasificar conjuntos según su cardinal.
6. Formar y reconocer conjuntos que tengan más o menos elementos que uno dado. Comparar los cardinales de los conjuntos.

7. Ordenar conjuntos según su cardinal y ordenar los cardinales de estos conjuntos. Contar progresiva y regresivamente.
8. Expresar números ordinales en su numeración específica.
9. Utilizar los números para representar cantidades.

4.3. Desarrollo de las capacidades

Con las mismas consideraciones del apartado 3.3 del tema anterior, estudiaremos ahora los procedimientos para la construcción de los conceptos que integran este tema en el aula de educación infantil.

1. Establecer comparaciones entre cantidades de objetos separados y expresar los resultados con la ayuda de cuantificadores

En el momento en el que se quiere iniciar la numeración, cobra sentido hablar de *unidad* frente a los cardinales de los conjuntos de objetos que tienen más de un elemento. Es el singular y el plural lo que está en el fondo. Los niños y las niñas necesitan aislar un elemento, saber que este es una unidad, para después enfrentarse a lo que será la multiplicidad de un grupo de elementos.

Atenderemos a esta necesidad trabajando situaciones de manipulación de cantidades y de estimación, a grandes rasgos, de sus diferencias cuantitativas al compararlas.

Antes de entrar en el 2.º ciclo de educación infantil, el alumnado seguramente habrá estado en contacto con el concepto de unidad en situaciones cotidianas (un dedo para un año, un hermano, una mamá...). En el aula se tiene que insistir al principio en la diferenciación de la unidad frente a la multiplicidad y en la utilización de las palabras *uno* o *muchos* (también podría utilizarse la expresión *varios*) para expresar cada caso.

Más adelante se amplía el trabajo de cuantificación de materiales separados con el conocimiento de algunos cuantificadores que complementan los conceptos iniciales, como por ejemplo *muchos* contrapuesto a *pocos*, o *todos* (este cuantificador se ha mencionado en la capacidad 7 del tema 1, al trabajar la formación de conjuntos) contrapuesto a *ninguno*. También incluiremos cuantificadores intermedios, como por ejemplo *algunos*, entre todos y ninguno. El docente utilizará de manera natural el vocabulario asociado a estos conceptos, hasta conseguir que el alumnado lo incorpore a sus conversaciones sin ningún problema.

En los primeros pasos del desarrollo de esta capacidad trabajaremos exclusivamente con objetos reales en situaciones cotidianas, para pasar con posterioridad a la realización de actividades con representaciones gráficas en las que sea necesario utilizar los cuantificadores mencionados (dibujar muchas estrellas en un mural en el que hay pocas nubes –figura 53– encontrar unas pocas vacas en la fotografía de una granja en la que hay muchos caballos, descubrir que no hay ningún niño en la imagen de una calle...).



Figura 53. Representación de pocas nubes y muchas estrellas

La meta final de este trabajo será la cuantificación exacta de los materiales separados mediante el recuento y para eso utilizaremos más adelante los números naturales.

2. Comparar cantidades de objetos separados con la ayuda de los aspectos cuantitativos de las correspondencias entre conjuntos

La diferencia entre esta capacidad y la primera es que ahora se comprueba, con la ayuda de los instrumentos matemáticos necesarios, si la estimación de la comparación de cantidades realizada por el alumnado es correcta o no. En la anterior se hacía una apreciación intuitiva, ahora utilizaremos las correspondencias biunívocas (en el caso de comparar cardinales diferentes) o las aplicaciones biyectivas (en el caso de comparar cardinales iguales), para extraer conclusiones cuantitativas que nos permitan afirmar o desmentir si lo que se había apreciado de manera estimativa es cierto o no.

Esto lo haremos ya desde el inicio del ciclo trabajando con dos conjuntos de cardinales muy contrastados, cuyos elementos sean lo más parecidos posible (mejor si son iguales). Es decir, si lo que queremos es que comparen cantidades y puedan llegar a expresar *hay más _ que _* o *hay menos _ que _*, intentaremos que no sea otra característica diferenciadora de los elementos la que capte su atención. Así, al comparar dos lápices y siete lápices de colores (de la misma marca, longitud, dureza...), lo que se pretende es que puedan percibir que la cantidad es diferente. Sin embargo, si comparamos dos mesas y siete lápices, como los elementos son muy diferentes, el número de objetos deja de ser la característica que más llamará la atención y será el volumen, por ejemplo, lo que les hará decir que hay más en las mesas, cuando realmente, hay más en los lápices de colores.

También en este momento se puede empezar a trabajar el concepto de igualdad respecto de la cantidad, aprovechando situaciones o actividades que se presenten en clase. Por ejemplo, se forman en clase grupos de tres niños o de tres niñas para hacer un trabajo y se les pide que comprueben que todos tienen el mismo número de miembros. En cualquier actividad de este tipo será necesario que verbalicen *hay igual cantidad de _ que de _* o *hay tantos de _ como de _*, cuando se compruebe la igualdad comparando los cardinales de los conjuntos.

Como los elementos que se utilizan son muy parecidos, la estimación de cantidades no presenta dudas, generalmente. En el caso de que sí se presentaran, tendríamos que recurrir a las correspondencias para asegurar las estimaciones que hagan. Así, se establecería una correspondencia biunívoca o una aplicación biyectiva entre los dos conjuntos asociando uno a uno los elementos de ambos hasta que en uno de ellos (biunívoca) o en los dos (biyectiva) no quede ningún elemento.

Hacia la mitad de ciclo hay que introducir alguna diferencia entre los elementos que forman los conjuntos a comparar. Esta no debe ser muy significativa, pero se tiene que empezar a separar la idea de cantidad de la idea de forma, color, tamaño... En el ejemplo anterior, se pueden usar lápices y rotuladores para «marcar», o libros y libretas, es decir, no son exactamente los mismos elementos, pero se parecen bastante. También aumentaremos la dificultad disminuyendo la diferencia entre los cardinales de los conjuntos, insistiendo en la igualdad de estos cuando se produzca y usando las expresiones adecuadas a cada situación: *hay más _ que _*, *hay menos _ que _*, *hay igual de _ que de _*.

De la misma manera que al principio del ciclo, usaremos las correspondencias para aclarar las dudas que puedan surgir. En este trabajo ampliaremos el vocabulario del alumnado incorporando las palabras habituales en las correspondencias, como *cada uno*, *alguno*, *unos*, *ningún*, *no todos*, *por lo menos*..., dotándolas de sentido al utilizarlas en contextos adecuados. Por ejemplo, al repartir las tareas de clase para los niños y las niñas diremos «cada uno debe elegir una tarea» o al asociar alumnos con sillas en una actividad de psicomotricidad diremos «no todos subirán arriba de una silla, al menos tres se quedarán abajo porque tienen que recorrer un itinerario señalado por sus compañeros y compañeras», etc.

Las situaciones manipulativas mencionadas hasta ahora se completarán con actividades gráficas en las que se trabajarán todos los conceptos anteriores a partir de conjuntos representados en imágenes, verbalizando de nuevo las comparaciones de cantidades que hagan y utilizando, cuando sean necesarias, correspondencias gráficas para comprobarlas. En la figura 54 se muestra el ejemplo con animales de granja comentado en la capacidad 1, en el que la gran diferencia entre el número de vacas y de caballos hace innecesario representar la correspondencia para saber que hay pocas vacas y muchos caballos.

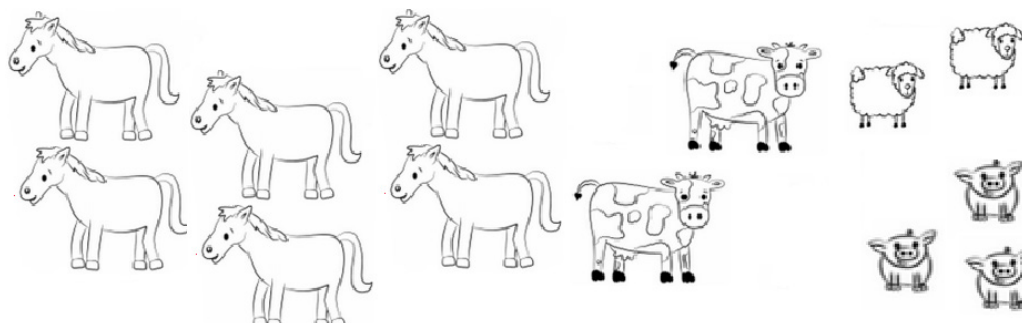


Figura 54. Representación de animales de granja con pocas vacas y muchos caballos

Cuando el número de vacas y de caballos es bastante semejante, se puede representar una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos para ayudarles a averiguar que hay más caballos que vacas, como se ve en la figura 55.

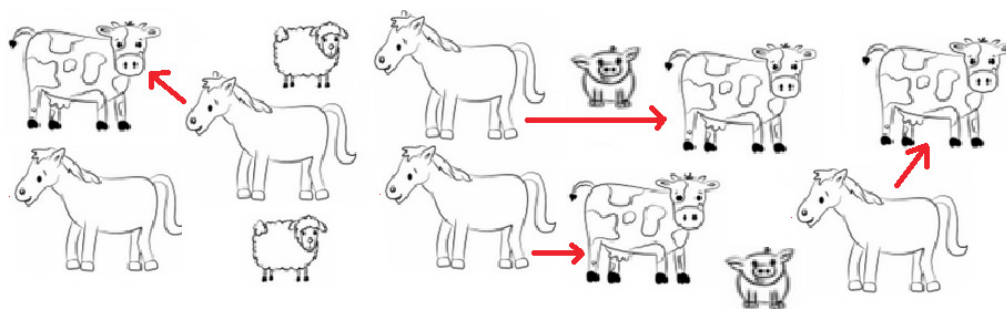


Figura 55. Representación de una correspondencia biunívoca entre el conjunto de caballos y el de vacas

Hacia el final del ciclo repasaremos todo lo que se ha visto previamente y se aumentará la dificultad de las actividades, comparando cantidades de elementos, que podrán ser totalmente diferentes, con la finalidad de aislar la idea de cantidad de cualquier otra característica física de los objetos. En este momento final del ciclo es cuando se hacen más necesarias las comprobaciones mediante correspondencias porque es cuando el alumnado tiende a confundir más las situaciones de comparación.

Se reforzará el dominio del vocabulario asociado y del trabajo gráfico mencionado con anterioridad.

3. Conocer los diez primeros números naturales a partir de la experiencia con conjuntos de objetos

El objetivo de esta capacidad es afinar la percepción aproximada de la cantidad introduciendo los números para precisarla. Para construir cada uno de ellos utilizaremos siempre el procedimiento siguiente: añadir un elemento a la cantidad correspondiente al número anterior al que queremos introducir y presentar el nuevo número asociándolo a la cantidad que acabamos de formar.

Antes de empezar el 2.º ciclo de educación infantil, los niños y las niñas son ya capaces de distinguir entre el 1 y el 2 a partir de la observación de su propio esquema corporal y de las preguntas cotidianas alrededor de su edad que representan con los dedos. También es probable que encuentren estos números en objetos ajenos a su propio cuerpo, teniendo en cuenta que 2 será la cantidad que resulta cuando añadimos un elemento a otro que ya teníamos. A medida que realizamos actividades de este tipo, el alumnado identifica las palabras uno y dos, asociándolas a las cantidades de objetos correspondientes, sin que sea necesaria la identificación de las grafías.

Al comienzo de este ciclo habrá que repasar el 1 y el 2 e introducir el 3 como el número correspondiente a la cantidad que resulta cuando añadimos un nuevo elemento a dos que ya teníamos (tienes dos años y vas a hacer uno más, es decir, tres; erais dos niños y niñas pintando el mural y os ayuda otro, ahora sois tres; ...). Para reforzar esta idea, contaremos hasta tres objetos reales, evitando la recitación cantada de los números descontextualizados (contar las fotos de los dos o tres compañeros que faltan hoy a clase porque se encuentran enfermos, contar los tres colores con los que pintaremos un dibujo ...). Además de contar tendrán que construir conjuntos de tres elementos (formar un grupo de tres niñas, por ejemplo; sacar tres carpetas de la estantería; ...), hacer series de módulo hasta tres elementos... (véase capacidad 14 del tema 1), siempre de manera manipulativa. Nos aseguraremos de que el alumnado domina las palabras que denominan los números conocidos hasta ahora y su correcta asociación con las cantidades correspondientes. Aun así introduciremos las grafías 1, 2 y 3 sin que sea necesario que las tengan que escribir en este momento. Podemos tenerlas colgadas en las paredes del aula, observarlas en el calendario, en las fechas de la pizarra, en la lista de clase. También podrían rellenar sus siluetas vacías y grandes con pegatinas, como se indica en la figura 56, en la que el 1 está completado, el 2 iniciado y el 3 todavía vacío, o caminar por encima de ellas...



Figura 56. Representación de las siluetas del 1, el 2 y el 3

Hacia la mitad del ciclo repasaremos estos tres números e introduciremos el 4 y el 5 añadiendo siempre un elemento a la cantidad del número anterior. Para reforzar estos números nuevos usaremos la sucesión anterior de actividades llegando hasta el 5: contar objetos reales, construir conjuntos y completar series. Habrá que ampliar estas actividades manipulativas con el conteo y la construcción de conjuntos con apoyo gráfico (contar los 5 caballos de una foto de una granja, por ejemplo la de la figura 55, contar los 4 coches de un catálogo de juguetes, dibujar 4 estrellas en un cielo pintado...).

También se trabajará la escritura de las grafías de los números por parte del alumnado, teniendo en cuenta las limitaciones que pueden presentar asociadas a su nivel de orientación espacial y de lateralidad, además del grado de desarrollo de su motricidad fina.

Antes de continuar con más números, introduciremos el cero, para indicar que no hay ningún elemento.

El cero no es el primer número a introducir y este hecho tiene una explicación. Es la manera de representar lo contrario de lo que representan el resto de números.

Es el único que se refiere a la ausencia de cantidad, por eso no podemos pensar que el tratamiento sea igual. Hay que decir también que ha sido un hecho históricamente difícil de conciliar con los diferentes sistemas de numeración. Aunque la humanidad ha utilizado el cero para representar la ausencia de elementos desde hace más de 4.000 años en la civilización babilónica, este no se usó para ocupar un lugar en la representación de los números de varias cifras hasta que los indios lo incorporaron a su sistema de numeración aproximadamente en el siglo V. Hay que elegir bien situaciones que originan la necesidad de representar que no hay ningún elemento de algún tipo para justificar su aparición. Por ejemplo, la puntuación de un alumno en un cuadro que recoge los resultados de un juego, el número de niños y niñas que están enfermos un determinado día en un listado de faltas de cada mes, el número de hermanos de algunos niños, etc.

Más adelante, para completar el estudio de los números en educación infantil se introducen el 6, 7, 8 y 9, siempre por el procedimiento de añadir un elemento a la cantidad que corresponde al número anterior. Se usará el mismo esquema de trabajo que se ha seguido para los otros números: contar hasta 6, 7, 8 o 9 objetos, construir conjuntos que tengan estos números como cardinales y completar series de módulo hasta 9 elementos, mediante actividades que estarán relacionadas con situaciones de interés para el alumnado y que se realizarán tanto de manera manipulativa como con apoyo gráfico (contar o construir conjuntos a partir de revistas, catálogos, fotografías, libros, dibujos...). Por ejemplo, si estamos trabajando un proyecto en clase sobre Egipto, les podemos presentar diferentes ilustraciones (figura 57), para que cuenten los elementos que aparecen en ellas.

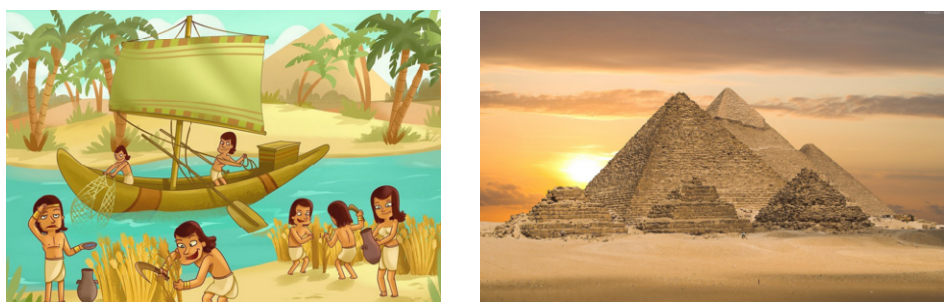


Figura 57. Imágenes de Egipto para contar personas (izquierda) y pirámides (derecha)

Se reconocen las nuevas grafías y se refuerza la representación gráfica de estas y de las anteriores, sabiendo que hacia el final de la etapa ha mejorado bastante el nivel de orientación espacial y de lateralidad del alumnado, así como la evolución de su motricidad fina. Es importante que conozcan otros tipos de grafías además de las que se utilizan en la clase, para diversificar y enriquecer el conocimiento de estas (buscar representaciones de los números en libros, calendarios, carteles y observar sus parecidos y diferencias).

Habrà que trabajar también la estimación de cantidades de elementos por aproximación visual, para ayudar a conseguir que se fijen en la cantidad y no en el tamaño, la forma, el color, etc., de los objetos, potenciando de esta manera el desarrollo de su sentido numérico. En cualquier actividad en la escuela nos encontramos con

agrupaciones de elementos, por ejemplo, cuando van a clase de psicomotricidad podemos tener preparados diferentes grupos de materiales para utilizarlos: uno con 3 pelotas, otro con 5 palos y otro con 7 conos. Se trata de identificar, por ejemplo, el número de palos sin que sea necesario contar los elementos.

4. *Formar y reconocer conjuntos que tengan el mismo número de elementos que uno dado*

A medida que el alumnado va conociendo los números, habrá que desarrollar estrategias para reforzar la función cardinal de los mismos. Esto pasará por reforzar la idea de número de elementos de un conjunto, hasta que esta quede suficientemente clara y, con ella, los niños y las niñas asimilen el aspecto cardinal de los números naturales.

En la segunda parte del ciclo y teniendo en cuenta que usaremos los números que conozcan en cada momento, hará falta que formen conjuntos con el mismo cardinal que otro dado. Tendremos que insistir en que los elementos pueden ser diferentes a los del modelo, solo hará falta que el conjunto tenga el mismo cardinal. Por ejemplo, si estamos preparando la mesa para hacer una merienda de cumpleaños, ponemos nosotros cinco platos en la mesa principal, junto a la cual hay otra con vasos y cucharas (figura 58).

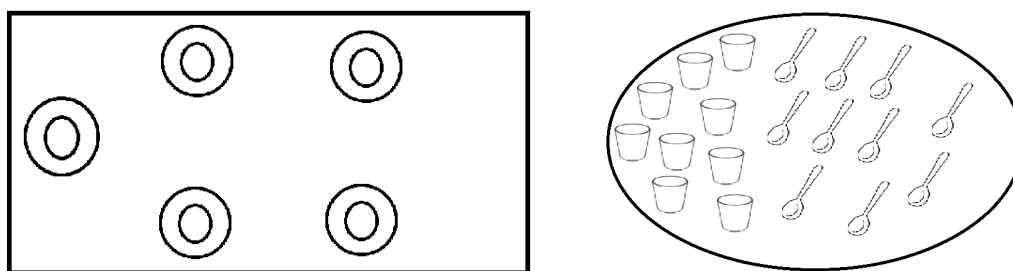


Figura 58. Representación de una mesa con 5 platos y de otra con vasos y cucharas

Los niños y las niñas tendrán que acabar de poner la mesa formando conjuntos de tantos vasos o de tantas cucharas como platos hay.

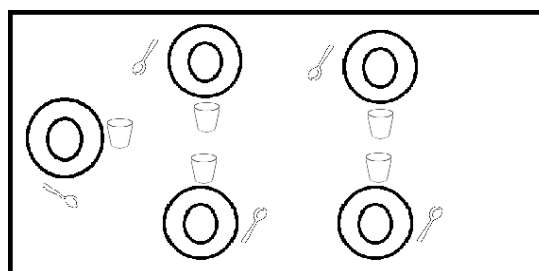


Figura 59. Representación de una mesa con conjuntos equipotentes de platos, de vasos y de cucharas

Una vez esté creado el nuevo conjunto, es importante preguntarles cuántos elementos había en el primero y cuántos hay en el que han formado. En este momento la fuerza tiene que recaer en la comprobación de la igualdad de los cardinales y en

la correcta verbalización de esta: «hay igual cantidad de vasos (o de cucharas) que de platos», «hay 5 de cada», por ejemplo.

Si lo que se quiere es reconocer la igualdad de cardinales entre un conjunto dado y otro que tienen que seleccionar, el alumnado elegirá, entre varios conjuntos con diferentes cantidades de elementos, alguno cuyo cardinal sea igual que el del primero. Por ejemplo, hemos elegido un grupo de seis niños y niñas para hacer un baile y tenemos varias cajas con cintas de colores que han de utilizar en el baile; se trata de que seleccionen la caja que tiene el mismo número de cintas que de alumnos hay. Les preguntaremos «cuál es el motivo que les ha hecho elegir ese conjunto» y les pediremos que verbalicen la igualdad de cantidades y la igualdad numérica de manera análoga al caso anterior, es decir, «hay igual cantidad de niños y niñas que de cintas», «hay 6 de cada», por ejemplo. En un primer momento solo habrá un conjunto que cumplirá la condición y, más adelante, puede haber más de uno para elegir.

Tanto en el caso de formar conjuntos como en el de reconocerlos se puede trabajar al principio con objetos reales y más adelante con representaciones gráficas, tanto realizadas por el propio alumnado como preparadas por los docentes. En cualquiera de los casos deberán fijarse en la cantidad de elementos del conjunto inicial y del conjunto formado o elegido y verbalizar la igualdad de sus cardinales reforzándola con la utilización del número común.

5. Clasificar conjuntos según su cardinal

Lo que se pretende con esta capacidad es comprobar si los niños y las niñas tienen interiorizada la idea de cantidad asociada al concepto de número y si son capaces de considerar aquella como una propiedad de los elementos de algunos conjuntos que les permite clasificarlos.

Se empezará en el último curso del ciclo porque se trata de profundizar en el conocimiento de los conceptos de cantidad y número, para conseguir que el alumnado los integre de manera natural en su pensamiento, dado que son dos conceptos que siempre están presentes en la realidad.

Podemos desarrollar este trabajo a partir de un material preparado, buscado o construido por nosotros mismos en el cual, junto con cualidades como colores, formas, etc., aparezca también la cantidad como una más de las características de las piezas que lo componen. Por ejemplo, preparamos 24 bolsas y 24 vasos de plástico transparente con 3, 4 o 5 caramelos del mismo tipo (con palo o sin palo) y del mismo sabor (fresa, naranja, limón y menta) en cada recipiente. Hará falta que lo clasifiquen de todas las maneras posibles que se les pueda ocurrir a partir de nuestras propuestas de guardar el material en cuatro, dos o tres cajas.

En un primer momento el criterio elegido para hacer las clasificaciones será el sabor (cuatro clases, una en cada una de las cuatro cajas), el tipo de caramelo o el de recipiente (dos clases, una en cada caja). Posteriormente, insistiendo en

que continúen clasificando de maneras diferentes a las que ya han hecho, tiene que aparecer la clasificación por los cardinales, es decir, la agrupación de todos los envases que tengan tres caramelos, por un lado, todos los que tengan cuatro, por otro y todos los que tengan cinco por otro (tres clases ahora, una en cada una de las tres cajas).

En este momento es cuando ya han considerado el cardinal del conjunto como una propiedad que puede caracterizar conjuntos y, por lo tanto, puede servir como criterio para clasificar el conjunto referencial. Se ha producido de manera natural la asociación cantidad y número, por lo tanto se ha identificado el número con la cantidad que le corresponde.

En las clasificaciones anteriores podemos poner nombre a cada una de las clases que se forman: con palo, sin palo; los de limón, los de fresa, los de naranja, los de menta; las bolsas, los vasos. Procederemos de manera análoga en la última clasificación, así, el nombre que corresponde en la clase formada por todos los envases de tres caramelos podría ser «los de 3». «Los de 4» sería el nombre de la clase formada por los envases con cuatro caramelos y «los de 5» el de la formada por los de cinco caramelos. Es importante observar que estamos haciendo uso de la definición formal de número natural según Cantor (véase la «Introducción» de este tema) y que las clases obtenidas en la última clasificación se han construido al aplicar la relación binaria de equivalencia «tener el mismo cardinal». Será pues, en este caso, el número natural aquello que caracteriza a cada uno de los conjuntos clasificados.

También es conveniente que miren a su alrededor y encuentren situaciones en las que se clasifiquen conjuntos por su cardinal: envases para huevos (figura 60), cajas de lápices de colores, de gomas de borrar, paquetes de hojas, etc.



Figura 60. Clasificación de envases para 6, 10 o 12 huevos

Más adelante trabajaremos esta capacidad utilizando materiales gráficos en los cuales aparezca el cardinal como una de las características de las piezas del mismo. Por ejemplo, relacionado con un trabajo en el aula sobre el campo, podemos fabricar un material compuesto por fichas de cartulina con dibujos de flores, árboles y setas, de tres colores diferentes y con dos, tres o cuatro dibujos en cada ficha (figura 61).

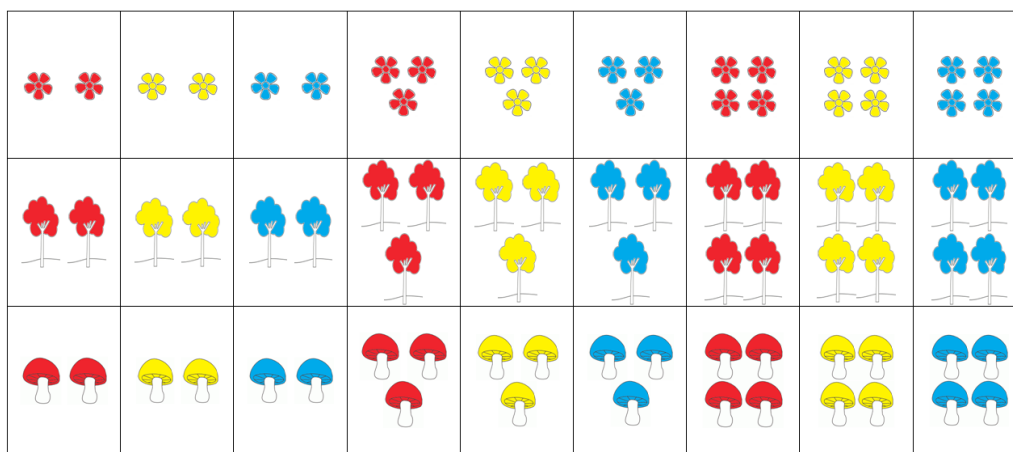


Figura 61. Ejemplo de material gráfico para trabajar la clasificación por el cardinal

Pueden clasificarlas por colores y por figuras de manera bastante fácil. Nuestro interés será que lo hagan también por el número de dibujos de cada ficha, para llegar a las mismas finalidades que en los casos anteriores.

Es imprescindible que el alumnado verbalice todo el trabajo que haga con objetos reales o gráficos y que exprese correctamente las relaciones que se establecen entre las diferentes piezas de los materiales y las igualdades numéricas que se tienen en cuenta para establecer las clases de equivalencia.

6. Formar y reconocer conjuntos que tengan más o menos elementos que uno dado. Comparar los cardinales de los conjuntos

Como complemento de la capacidad 4 y avanzando en el conocimiento de los dos aspectos de los números naturales, trabajaremos ahora la función ordinal de los mismos y serán esta capacidad y la siguiente las encargadas de hacerlo. Los conjuntos continuarán siendo los instrumentos que usaremos para trabajarlas.

También en la segunda parte del ciclo y teniendo en cuenta los números que el alumnado conoce en cada momento, hará falta que *formen* conjuntos con más o menos elementos que otro dado. Tendremos que insistir en que los elementos pueden ser diferentes a los del modelo, solo hará falta que el nuevo conjunto tenga más o menos elementos que aquel. Por ejemplo, si hemos elegido un grupo de cuatro alumnos para preparar un mural, podemos pedirles que saquen del armario del material de aula más o menos cartulinas que niños y niñas son para trabajar con ellas. Cuando esté creado el nuevo conjunto les preguntaremos cuántos elementos había en el primer conjunto y cuántos hay en el que han formado. En este momento la fuerza tiene que recaer en la comprobación de la desigualdad de los cardinales y en la correcta verbalización de esta: *hay más o menos cantidad de cartulinas que de niños y niñas*, hay cinco o tres cartulinas y cuatro niñas, por ejemplo. En cualquiera de los casos, tendrán que completar la verbalización expresando la comparación entre los números utilizando el vocabulario correcto: *cinco es mayor que cuatro o tres es menor que cuatro*.

Si lo que se quiere es *reconocer* la diferencia de cardinales entre conjuntos, el alumnado tendrá que encontrar, a partir de un conjunto modelo y de varios de distintos cardinales, alguno con más o menos elementos que el primero. Por ejemplo, hemos puesto en una mesa cinco platos vacíos para preparar una merienda y tenemos unas cajas con diferentes cantidades de bolsas de papas (3), de almendras (2), de cacahuets (7), de botes de aceitunas (4), etc.; se trata de que encuentren cuál es la caja que tiene más o menos bolsas o botes, que platos hay. Hay que preguntarles «cuál es el motivo que les ha hecho seleccionar ese conjunto» y pedirles que verbalicen la diferencia de cantidades y la desigualdad numérica de manera análoga al caso anterior, por ejemplo, *hemos elegido la caja que tiene siete bolsas de cacahuets porque hay más bolsas que platos*, o *hemos elegido la caja que tiene tres bolsas de papas porque hay menos bolsas que platos*. Las expresiones de las comparaciones numéricas serán ahora, respectivamente, *7 es mayor que 5* o bien *3 es menor que 5*. En un primer momento solo habrá un conjunto que cumplirá la condición y, más adelante, puede haber más de uno.

Para realizar todas estas actividades se puede trabajar primero con objetos reales y después con representaciones gráficas, sin olvidar que siempre deben fijarse en la cantidad de elementos del conjunto inicial y del conjunto formado o elegido. Por ejemplo, en un proyecto sobre el Universo queremos que los niños y las niñas dibujen trayectorias que diferentes cohetes espaciales recorren para ir de unos planetas a otros. Les ofrecemos la representación de un conjunto con tres cohetes y les pedimos que dibujen más planetas que cohetes hay para poder elaborar distintos murales con las mencionadas trayectorias (figura 62).

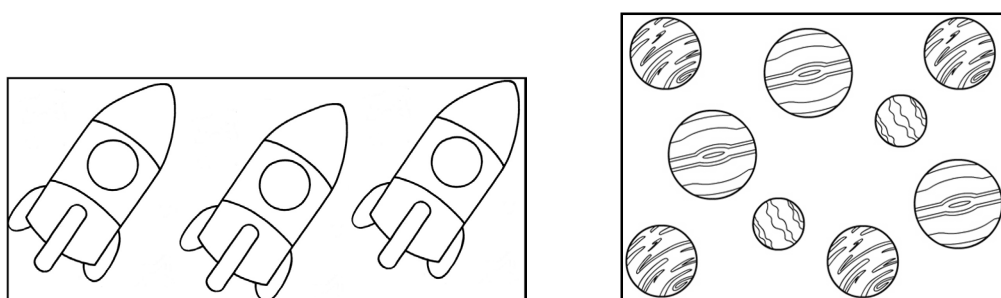


Figura 62. Representación de un conjunto de tres cohetes espaciales y de otro con nueve planetas dibujados por el alumnado

Es imprescindible llegar siempre a expresar adecuadamente la desigualdad entre los cardinales de los dos conjuntos y, por tanto, el orden de los mismos.

En el desarrollo de esta capacidad tenemos que reconocer dos niveles de aproximación a los números. Primeramente, al observar los conjuntos, hay que comparar la cantidad de elementos que tienen, fijándose solo en ellos. Después, se fijarán en los números que simbolizan los cardinales, los compararán y, recordando las cantidades que representan, los ordenarán. Esta será la acción que buscábamos ahora, ordenar dos números comparando cardinales de conjuntos.

7. Ordenar conjuntos según su cardinal y ordenar los cardinales de estos conjuntos. Contar progresiva y regresivamente

Como complemento de la capacidad anterior y con la intención de ordenar toda la serie numérica que se trabaja en educación infantil, se pretende ahora ordenar más de dos conjuntos en función de su cardinal y, por lo tanto, ordenar más de dos números. Continuaremos reproduciendo el mismo proceso de comparación, pero con la dificultad añadida de trabajar con más conjuntos.

Se empezará comparando las cantidades de elementos de tres conjuntos que pueden o no corresponder a números consecutivos y, después de verbalizar sus desigualdades, se llegará a la expresión del orden entre los números implicados. Por ejemplo, si en la cesta donde dejan sus almuerzos tenemos dos bocadillos de paté, cuatro de atún y seis de jamón york, ordenarán los conjuntos correspondientes y verbalizarán: hay *menos bocadillos de paté que de atún y menos de atún que de jamón york*, para poder decir a continuación que *dos es menor que cuatro y cuatro es menor que seis*. Evidentemente también se podría realizar la comparación inversa y ordenar así los números de mayor a menor.

Estas situaciones, que trabajaremos primero con objetos reales y después con representaciones gráficas, irán complicándose en la segunda mitad del ciclo hasta que puedan llegar a ordenar nueve conjuntos y, con ellos, los nueve números asociados.

Es importante que completemos estas actividades con otras en las cuales sea necesario contar ordenadamente diferentes cantidades de objetos para ayudarles a fijar la ordenación de los números de manera natural en su pensamiento. Podemos ayudarnos de juegos o canciones (*Los elefantes en la tela de la araña*, *Las manzanas del manzano*, *La canción de las botellas*, *John Brown era pequeño indio...*) en las que el conteo se realiza tanto progresiva como regresivamente, acompañándolo de la representación real de aquello que están cantando (niños y niñas que hacen de elefantes, pelotas que simulan manzanas que se quitan y se ponen de un manzano...), para que no se trate solo de recitar los números sin más, sino de asociarlos con la cantidad de objetos que les corresponde.

8. Expresar números ordinales en su numeración específica

En esta capacidad se pretende que el alumnado conozca los nombres y las representaciones de los números ordinales, asociándolos con los cardinales correspondientes, en diferentes acciones cotidianas que lo justifiquen.

Se trata de introducir, sobre todo en el último curso de la etapa, las palabras *primero*, *segundo*, etc., relacionándolas con las posiciones en una fila, la llegada en una carrera, los pasos a seguir para hacer un dibujo, una receta de cocina..., y también de utilizar las formas escritas 1.º, 2.º, etc., para representarlas.

9. Utilizar los números para representar cantidades

El objetivo que nos marcamos en el desarrollo de esta capacidad es que los niños y las niñas observen la presencia casi constante de los números en su vida y que reconozcan la utilidad de los mismos en cualquier situación cotidiana.

La trabajaremos principalmente en el último curso de educación infantil a partir de conversaciones entre ellos y ellas, lecturas de diferentes textos, explicaciones de distintas situaciones tanto de la vida diaria como de las que se realizan en clase..., para hacerles observar y reflexionar sobre el momento en el que aparecen los números y cuál es su importancia y utilidad en cada caso. Como actividad complementaria les podemos invitar a intentar vivir una mañana en el aula sin utilizar ningún número, para darse cuenta de la dificultad que supondría prescindir de ellos.

Cálculo operacional en educación infantil

1. Introducción

En este tema se trabaja la iniciación a la aritmética, para ofrecer a los niños y las niñas las herramientas matemáticas que les ayuden a responder las preguntas que la realidad les plantea respecto a «¿cuántos había?, ¿qué ha pasado?, ¿cuántos quedan?».

Empieza con la propuesta de cuatro fases para trabajar las operaciones en la escuela y finaliza con el tratamiento didáctico de las primeras relaciones del alumnado con la adición y la sustracción.

1.1. Reflexión general sobre las operaciones en la escuela

Parece lógico pensar que lo inmediato, una vez se ha introducido el concepto de número, tendría que ser el trabajo de operar con números naturales y signos aritméticos. Pero esta tarea requiere un nivel de abstracción superior al que hace falta para analizar adecuadamente las acciones con objetos, que son más intuitivas y que el alumnado no las encontrará en la escuela por primera vez.

Se puede afirmar, pues, que hay dos tipos de situaciones en referencia al hecho «de operar». Unas serían extraescolares, por lo tanto, naturales, intuitivas y a menudo necesarias. Estas acciones se podrían llamar también *cálculo mental*, por el hecho de que no hace falta disponer en el momento de lápiz y papel. Otras son las escolares, donde muchos de los esfuerzos se encaminan a averiguar mecanismos o a memorizar algoritmos (conjunto sistemático de pasos que conducen a la obtención de un resultado) que permiten operar. Dos situaciones muy diferentes *a priori* y con una respuesta también muy diferente por parte del alumnado.

La escuela, por un lado, tiene que solucionar esta situación de dicotomía; por otro, debe ser el lugar donde se canalice y respete el aprendizaje que los niños y las niñas hacen fuera del aula. Al mismo tiempo tiene que favorecer que este se integre en el conocimiento o «reconocimiento» de las operaciones aritméticas que deben desarrollarse en clase. Y, claro está, el objetivo es dotar al alumnado de más herramientas, de más capacidades para resolver los nuevos problemas que la realidad les plantea. Por tanto, el procedimiento se simplifica de este modo: hay que partir de situaciones problemáticas de la realidad y trabajar las herramientas necesarias

para solucionarlas, dotándolos así de las capacidades matemáticas que, una vez asimiladas, les permitirán resolver nuevas situaciones reales. En la etapa de educación infantil trabajaremos solo a partir de situaciones cotidianas. En primaria avanzaremos desde las situaciones reales hacia las abstracciones, la reflexión sobre las operaciones y los mecanismos de cálculo.

El objetivo de la escuela, pues, estará cubierto cuando el niño o la niña que sea capaz de operar con signos matemáticos reconozca la íntima relación que hay entre las acciones extraescolares y las escolares, descubriendo así que está preparado para dar respuesta matemática a las situaciones de su vida cotidiana. Hay que mencionar que la realidad a veces es muy diferente y el aprendizaje escolar no garantiza la eliminación de las trabas entre estos dos tipos de situaciones. El reto será, entonces, encontrar la manera de acercar a los ojos del alumnado los procedimientos que les permitirán operar y que tradicionalmente han podido ser algoritmos oscuros alejados de la intuición.

En todo el trabajo escolar referente al cálculo operacional presentaremos las operaciones siguiendo un esquema con las fases siguientes:

1. Exponer el significado de la operación partiendo de experiencias de la realidad y de su relación con la Teoría de Conjuntos, para que la operación tenga sentido para el alumnado.
2. Traducir simbólicamente la operación.
3. Automatizar la operación. Conocer el algoritmo, saber utilizarlo.
4. Resolver e inventar situaciones problemáticas relacionadas con la operación.

Cuando trabajamos estas fases, la expresión numérica de la operación será la transcripción de las manipulaciones de los niños y las niñas. Hay que tener en cuenta la dificultad que supone para el alumnado pasar de una acción concreta con los objetos a su expresión simbólica. Por ejemplo, entre la situación de reunir un conjunto de tres manzanas y otro de seis, y la expresión $3 + 6$, se deben salvar una serie de dificultades debidas a los significados diferentes que tienen para ellos las dos acciones. La utilización de signos matemáticos para escribir las operaciones, para simbolizarlas, exige una preparación previa mediante algunas etapas sucesivas. En primer lugar, repetiremos la manipulación con los objetos las veces que consideramos necesarias. Al mismo tiempo, trabajaremos la traslación al lenguaje verbal pidiéndoles que nos cuenten qué han hecho, sus reflexiones, sus pensamientos. Superado este momento, podemos introducir el paso al lenguaje gráfico y a la expresión mediante símbolos y signos matemáticos. El problema del docente es conseguir que el alumnado sea capaz de relacionar las acciones reales o imaginadas con su traducción al lenguaje matemático, que utiliza sus signos propios y sus fórmulas. No se trata, pues, de hacer comprender a los niños y las niñas el significado de la operación después de haberles enseñado a calcularla, sino al contrario, hace falta que utilicen una operación en la medida que comprenden lo que esta expresa y significa. A la vez, tenemos que trabajar la reversibilidad de su pensamiento respecto a las operaciones, es decir, hace falta que el alumnado sea capaz de pensar en situaciones reales que se resuelvan utilizando las diferentes operaciones estudiadas.

2. El cálculo operacional en el aula de infantil

2.1. Consideraciones previas

Del mismo modo que a nuestro alrededor siempre está presente la idea de cuantificar la realidad y su expresión provoca la presencia constante de los números en cualquier acción o relación que establezcamos, la idea de cálculo está también presente e íntimamente unida al concepto de número natural.

Para operar es necesario un conocimiento amplio del Sistema de Numeración Decimal (SND) y el hecho de obtener un resultado al aplicar una operación mediante un algoritmo, exige también un desarrollo cognitivo que en la mayoría de casos sobrepasa las edades que corresponden a la educación infantil.

Por lo tanto, si la pregunta es si se opera en esta etapa educativa al estilo propuesto en el párrafo anterior, la respuesta es no. Pero ¿quiere decir esto que en la educación infantil no hay actividad mental que se pueda relacionar con cálculo operacional? Rotundamente, también, la respuesta es no.

Será pues, este tema, y en concreto las cuatro capacidades dedicadas al segundo ciclo de educación infantil, el encargado de poner los primeros pasos en esta nueva manera de pensar, que combina los representantes de las cantidades, los números, para obtener otros que forman parte de las soluciones de las situaciones problemáticas que se plantearán en el aula para contextualizar nuestra tarea docente y encontrar el interés de ellos y ellas en aquello que operan.

Nuestro objetivo será tratar de una manera interesante y con mucha implicación de los niños y las niñas estas primeras aproximaciones a lo que significa operar, evitando el avance de procesos que pueden angustiarlos o predisponerlos de manera negativa hacia las matemáticas y que con la maduración cognitiva natural, es decir, haciéndolo en el momento oportuno, no supondría ninguna traba. Evidentemente, en la etapa de educación infantil solo trabajaremos las dos primeras fases de las operaciones y con un nivel muy incipiente.

No será, pues, nuestro objetivo demostrar lo mucho que sabe el alumnado de infantil si, cuando pasan a educación primaria, ya operan de manera básica. Será guiar su proceso de adquisición matemática de la manera más respetuosa con su nivel de desarrollo y estimular todas sus capacidades para dotarlos de las herramientas que les permitirán hacer, en su momento, las progresiones matemáticas que ahora no hemos trabajado de forma explícita, pero sí de una manera implícita para propiciar ulteriores éxitos.

2.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil

Cómo establecer los primeros pasos de una manera secuencial y adecuada a la educación infantil respecto del cálculo operacional será el objetivo del tema, que contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades siguientes:

1. Componer y descomponer números de una cifra.
2. Resolver situaciones problemáticas sencillas.
3. Realizar transformaciones que modifiquen y que no modifiquen una cantidad (con materiales separados).
4. Iniciar el cálculo mental.

2.3. Desarrollo de las capacidades

Con las mismas consideraciones del apartado 3.3 del tema 1, estudiaremos a continuación los procedimientos para construir los primeros pasos del cálculo operacional en el aula de educación infantil.

1. Componer y descomponer números de una cifra

En esta capacidad ponemos la mirada en la cantidad y en algunas situaciones en las cuales esta permanece invariable. Se puede redistribuir o reorganizar, pero no habrá ningún aumento o disminución en ella.

Empezaremos componiendo y descomponiendo diferentes cantidades en actividades muy cercanas y con números pequeños. Por ejemplo, para el caso de componer, podemos agrupar encima de la mesa de la maestra dos cartulinas y una cartulina que estaban en las mesas de un niño y de una niña de la clase. Para el caso de la descomposición y, para poner uno en cada ventana del aula, repartiremos en dos jarrones las tres flores que un niño ha llevado para la maestra. En ambos casos tenemos tres objetos tanto al inicio como al final de las actividades, pero están organizados de formas diferentes.

A medida que avanza el 2.º ciclo, ampliaremos el trabajo a números más grandes, aunque seguiremos componiendo a partir de dos cantidades iniciales y descomponiendo también en dos conjuntos de objetos. Además, podemos iniciar la representación gráfica de situaciones de estos tipos, en las cuales utilizarán dibujos agrupando o separando los elementos del mismo modo que se hacía manipulativamente. Por ejemplo, recortarán cinco naranjas de un catálogo situando tres en un mural sobre alimentación y dos en otro sobre productos típicos de la Comunidad Valenciana (figura 63), o colocarán cuatro cebras en un cercado reuniendo una y tres que estaban en otros dos que aparecen en las imágenes de un zoológico, que se está trabajando en el aula relacionado con un proyecto globalizado sobre animales salvajes.

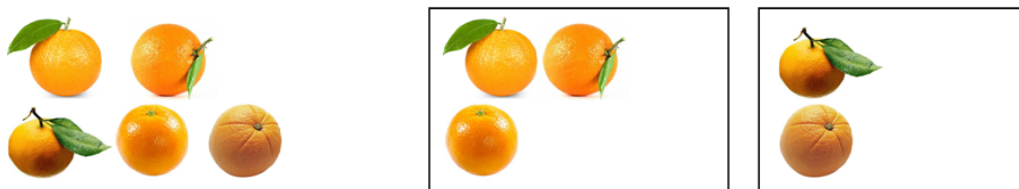


Figura 63. Representación de cinco naranjas recortadas de un catálogo y su distribución en dos murales

En el último curso del ciclo se continúa haciendo actividades como las mencionadas, pero ahora se utilizan ya todos los números que se estudian en infantil y se puede componer un número a partir de más de dos cantidades iniciales y descomponerlo también en más de dos números. Como ejemplos podemos retomar el de las cartulinas, que ahora serán siete y estarán inicialmente en tres mesas, o el de las flores, que serán ocho y tendrán que repartir en tres jarrones para adornar el aula.

En todos los niveles de trabajo el alumnado tiene que verbalizar lo que ocurre en cada caso (había tres cartulinas separadas en dos y una y ahora están las tres juntas, por ejemplo, para la primera situación descrita con cartulinas), observando que no varía la cantidad y reflexionando sobre las diferentes maneras de distribuirla (en el caso de ocho elementos, dos flores en un jarrón, dos en otro y cuatro en otro o bien, tres flores en un jarrón, tres en otro y dos en otro o..., por ejemplo).

2. Resolver situaciones problemáticas sencillas

Nos interesan ahora situaciones en las cuales la cantidad se ve modificada, porque añadimos o quitamos elementos. No se pretende llegar al fondo de las operaciones, aunque las acciones de añadir o quitar están en su base. Lo que queremos es potenciar en el alumnado un pensamiento de anticipación y reflexión a partir de una modificación de la cantidad de elementos iniciales.

Desde el principio del ciclo y empezando con los primeros números, buscaremos situaciones de añadir o quitar cantidades interesándonos por todo lo que ocurre en ellas. Por ejemplo, la maestra de la clase ha comprado tres barras de pan para hacer meriendas, la de la clase de al lado ha traído dos más y nos preguntamos cuántas barras tenemos en total. Hace falta que acompañemos el proceso manipulativo con su verbalización, insistiendo en la *situación inicial*, la *transformación* que ha sufrido la cantidad y la *situación final*. Es decir, tenemos que hacerles conscientes de cuántos había al principio, de qué ha pasado y de cuántos quedan al final. En el caso de las barras de pan dirán «teníamos tres barras de pan, la maestra de al lado ha traído dos más y ahora tenemos cinco».

Iremos aumentando los números que utilizan para estas situaciones e introduciremos actividades gráficas en las cuales los niños y las niñas representen con dibujos el aumento o disminución de la cantidad por el efecto de añadir o quitar elementos a los que había dibujados al principio. Por ejemplo, hay dibujadas cuatro lunas y hacen falta dos más o hay seis lunas y recortan dos.

Para desarrollar esta capacidad, y además de actividades como las que acabamos de mencionar que podemos encontrar en el día a día del alumnado, nos podemos ayudar de situaciones de compraventa escenificadas en el aula. Son muy motivadoras y proporcionan una estupenda ocasión para trabajar actividades de añadir y de quitar elementos con números sencillos. Utilizaremos monedas de valor 1 (euro, céntimo o cualquier otra) porque no nos interesa ahora que aprendan el sistema monetario, solo que usen las monedas para propiciar el intercambio entre ellos y las situaciones de aumento y de disminución de la cantidad que se producen.

En la primera parte del 2.º ciclo de infantil manipularán una cantidad de monedas no superior a cinco, comprarán solo un producto (el precio del cual no será superior a cinco monedas) y será la maestra o el maestro quien haga de tendero/a. Se escenificará lo que sería el proceso de compraventa en el aula y se verbalizará lo que ocurre, prestando especial atención a los tres momentos mencionados antes: situación inicial, transformación y situación final. Hace falta que sean conscientes del dinero con que cuentan al inicio. Que lo verbalicen y que tengan claro qué tienen. En el paso siguiente, y en relación con las transformaciones, se encontrarán dos tipos de situaciones diferentes: cuando van a pedir dinero al docente porque no tienen bastante o cuando van a comprar. En los dos casos estamos modificando la cantidad. Cuando piden, reciben unas monedas que aumentan las que tenían y cuando van a comprar tienen que pagar un dinero y, por tanto, al final tienen menos. En ambos casos deben acabar diciendo qué les ha quedado al final: «Tenía una moneda y me han dado dos más, ahora tengo tres» o «Tenía cuatro monedas y he gastado tres, me queda una». Hay que insistir en la importancia de estimar el resultado de sus acciones para que averigüen si pueden comprar o no un producto con un determinado dinero o si han pagado bien y les queda lo que esperaban.



Figura 64. Imagen de una tienda escolar

Más adelante organizaremos los estantes en que se encuentran los productos de la tienda de forma que, comprando uno de cada estante, no se supere la cantidad mayor de monedas que estén utilizando (por ejemplo, en un estante, golosinas, cuyo precio llega hasta tres monedas y, en el otro, refrescos que pueden valer hasta dos). El alumnado preparará las monedas que corresponden a los dos productos y verbalizará lo que ocurre en estas compras. Por ejemplo, «He preparado cuatro monedas para pagar dos que vale una bolsa de caramelos y dos que vale una botella de agua».

En el último curso, los compradores podrán tener hasta nueve monedas y las situaciones continuarán siendo de añadir o de quitar de manera análoga a las mencionadas antes. La novedad es que ahora los propios alumnos pueden ser los vendedores y que se puede introducir la realización de la lista de la compra por parte de los niños y las niñas que van a comprar dos productos, y del ticket de venta por parte de los que actúan como vendedores. En los dos casos escribirán los nombres de los productos y sus precios respectivos, así como el precio final, que pueden calcular reuniendo las monedas de cada producto o dibujando las monedas respectivas junto a cada número y contándolas todas juntas, como se puede ver, a modo de ejemplo, en la figura 65.







PASO 1	PASO 2
CARAMELOS 2	CARAMELOS 2 
CHICLES 3	CHICLES 3 
TOTAL ?	TOTAL ?
PASO 3	PASO 4
CARAMELOS 2 	CARAMELOS 2
CHICLES 3 	CHICLES 3
TOTAL 	TOTAL 5 

Figura 65. Representación del cálculo manipulativo y numérico del precio de una compra de dos productos

Para llevar su contabilidad y comprobar el dinero que les queda después de hacer una compra, pueden hacer los cálculos necesarios con las monedas reales o con sus dibujos, como se ve en la figura 66.

PASO 1	PASO 2
MONEDAS QUE TENGO 5 PRECIO BOLÍGRAFO 2 ¿MONEDAS QUE ME QUEDAN?	MONEDAS QUE TENGO 5  PRECIO BOLÍGRAFO 2 ¿MONEDAS QUE ME QUEDAN?
PASO 3	PASO 4
MONEDAS QUE TENGO 5  MONEDAS QUE ME GASTO 2 ¿MONEDAS QUE ME QUEDAN?	MONEDAS QUE TENÍA 5 MONEDAS QUE ME GASTO 2 _____ MONEDAS QUE ME QUEDAN 3 

Figura 66. Representación del cálculo manipulativo y numérico del dinero que les queda después de hacer una compra

Aunque en educación infantil no es obligatoria la introducción de los signos matemáticos de las operaciones, se puede iniciar la utilización del nombre y del signo de la adición en alguna de estas actividades. Si el desarrollo del curso y el nivel del alumnado lo permiten, también se podría introducir el nombre y el signo de la sustracción en actividades escritas donde los niños y las niñas calculan las monedas que les quedarán después de haber comprado unos determinados productos.

Se puede completar todo este trabajo con actividades gráficas realizadas a partir de catálogos con precios, carteles de productos, etc., y simulando lo que sería una compra en la tienda correspondiente utilizando como ayuda la lista de la compra y el ticket.

3. Realizar transformaciones que modifiquen y que no modifiquen una cantidad (con materiales separados)

Esta capacidad pretende ayudar a los niños y las niñas a reflexionar sobre los diferentes efectos de las distintas transformaciones que podemos aplicar a las cantidades de materiales separados.

Se trabajará solo en el último curso del ciclo, después de haber resuelto muchas situaciones de los tipos que hemos desarrollado en las dos capacidades anteriores. Se trata de contraponer las actividades que no modifican una cantidad y las que sí la modifican (de añadir o de quitar). Es como la fusión de los dos apartados previos y habrá que observar lo que pasa y reflexionar.

Frente a situaciones en las cuales solo se cambia la distribución espacial o la apariencia de los elementos (se traslada una pila de libros de una mesa a otra; se quita el envoltorio a unos caramelos; etc.) en las que no se modifican las cantidades iniciales, presentamos otras en las que hay acciones de añadir o de quitar elementos (traemos más libros de la clase del lado; nos comemos dos caramelos; etc.) y, por lo tanto, se producen modificaciones de las cantidades. Pretendemos que el alumnado reflexione sobre estas situaciones y que llegue a descubrir que solo se modifica una cantidad cuando añadimos o quitamos elementos y nunca en los otros casos. Es decir, que sean capaces de conseguir una *conservación razonada de la cantidad* de materiales separados y que no se dejen confundir por percepciones o apreciaciones equivocadas al respeto.

Es probable que no todo el alumnado de la clase llegue a entender esta cuestión de una manera definitiva. Su tratamiento se retoma en primer curso de primaria con la intención de que todos los niños y las niñas interioricen este pensamiento y dominen los cambios de cantidades y sus causas en todo lo que se refiere a materiales separados.

4. Iniciar el cálculo mental

Ahora intentamos que el alumnado pueda trabajar con los números sin que sea necesaria la presencia de los objetos que les corresponden. Es un trabajo incipiente pero muy importante, pues recorre los primeros pasos para desarrollar la capacidad de calcular mentalmente que los niños y las niñas tienen que conseguir en educación primaria.

Empezaremos con números pequeños y con situaciones reales y cercanas en las cuales el alumnado tiene delante el material inicial al que se refiere la actividad y debe pensar qué pasaría si añadieran o quitaran elementos. Por ejemplo, hemos cogido tres lápices de colores para pintar un árbol ¿cuántos tendríamos si cogiéramos dos más?, o José ha traído cinco tartitas porque es su cumpleaños ¿cuántas quedarían si nos comiéramos tres?

Más adelante probaremos a quitar el material y, por lo tanto, tendrán que imaginar qué pasa sin manipular ningún elemento, trabajando con los primeros números al principio y aumentando hasta el nueve más tarde. Siempre se intentará que la situación sea lo más real posible y se creará la necesidad de modificar una cantidad a partir de un caso concreto. Por ejemplo, si tenemos que comprar una planta para el aula que vale 3 euros y una maceta en la cual ponerla que vale 2 ¿cuánto dinero necesitamos?, o bien, si hemos elegido 7 niños y niñas para representar un cuento y se ponen 3 enfermos ¿cuántos quedan para hacer el cuento?

Iniciación a la medida

1. Introducción

Se trabaja la iniciación a la medida en este tema, para ofrecer a los niños y las niñas las herramientas matemáticas que les ayuden a responder las preguntas que la realidad les plantea respecto a «¿cuánto hay?» de algo o «¿cuándo ocurren los hechos?».

Empieza el tema con una referencia histórica sobre los conceptos de magnitud y medida y sobre el Sistema Internacional de unidades, continúa con un breve comentario sobre su formalización y finaliza con un extenso tratamiento didáctico de los contenidos correspondientes en el aula de infantil.

1.1. Histórica

En física, magnitud es cualquier propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia, que puede expresarse cuantitativamente mediante un número y una referencia.¹ Algunas magnitudes pueden ser directamente apreciables por nuestros sentidos, como la longitud, la masa, la superficie...; otras no lo son y necesitan métodos indirectos para medirlas (aceleración, energía...). Se denominan magnitudes escalares las que pueden expresarse numéricamente y vectoriales las que quedan determinadas por un vector. La belleza, así, no es una magnitud, porque no es posible elaborar una escala ni mucho menos un aparato que determine cuántas veces un ser o un objeto es más bello que otro.

La noción de magnitud está inevitablemente asociada a la de medida. Medir es relacionar una cantidad de una magnitud con otra u otras de la misma magnitud que se consideran unidades, para saber el número de veces que la unidad está contenida en la cantidad a medir. Es decir, la acción de medir comporta tres entidades: una magnitud, una unidad de esta magnitud y un número. La medida es, por lo tanto, el resultado numérico de la comparación de cierta cantidad de una magnitud con la unidad escogida al efecto.

Antiguamente se elegían muchas unidades de referencia para medir un mismo tipo de magnitud. Una unidad pequeña para cantidades pequeñas de la magnitud y una grande para cantidades grandes, tratando de que los números que resultaban de comparar las cantidades de magnitud a medir con la unidad de esta fueran números sencillos, números de dos o tres cifras y tal vez una cifra decimal o dos. Así, la

1. Definición de magnitud extraída de «Vocabulario Internacional de Metrología. Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados». Ministerio de Industria, Energía y Turismo, 3.ª edición 2012, última visita 20-7-2016 de <http://www.cem.es/sites/default/files/vim-cem-2012web.pdf>.

masa de piedras preciosas se medía en quilates, que es una semilla de masa 0,2 g de un árbol árabe (no se debe confundir con la otra acepción de la palabra quilate, fracción másica de oro en una aleación multiplicada por 24, lo que hace que los tipos de quilates solo se puedan diferenciar por el contexto) y las cantidades grandes de esta magnitud, como por ejemplo las relativas a las cosechas, en toneladas.

Esta primera manera de medir está claro que no es útil, porque cada zona puede elegir su manera particular de hacerlo. Concretamente, en nuestro país, la hanegada es una unidad de superficie de los campos de cultivo, que en la actualidad todavía se usa. Equivale a 833,3 m². Es la extensión de tierra que se calcula que se puede sembrar con una fanega de grano; contiene cuatro «quartons» (unidad de medida de la tierra agrícola en Mallorca) y equivale a la duodécima parte de una hectárea (unidad de medida de superficies del Sistema Internacional) (Dorce, 2013; 2014).

Una segunda opción es adoptar una única unidad y usarla con los múltiplos y submúltiplos de esta, por ejemplo, el metro, el kilómetro, el milímetro..., e intentar que el número que resulta de la medida sea un número cómodo.

La tercera de las opciones es elegir solo una unidad y aceptar que el número que resulte de medir la magnitud no sea sencillo. Por ejemplo, el diámetro de una aguja es $8,5 \times 10^{-5}$ m, que se lee «ocho coma cinco, por diez elevado a menos cinco metros» y el diámetro de la Tierra es $1,27 \times 10^7$ m.

A lo largo de la historia este tema ha evolucionado notablemente por varias razones, la primera y más importante, porque la necesidad de medir es de un uso cotidiano habitual. No se puede huir de este hecho.

El Sistema Internacional de unidades

El primer conjunto de unidades concebido como un sistema estable fue el Sistema Métrico Decimal, creado en Francia con la Revolución francesa a finales del siglo XVIII.

En 1881, se adoptó en el Congreso Internacional de los Electricistas, celebrado en París, el Sistema Cegesimal (CGS, iniciales de centímetro, gramo, segundo), propuesto por el matemático alemán Karl Gauss.

Basado en el primero, en 1901, el físico e ingeniero italiano Giovanni Giorgi propuso el sistema MKS (iniciales de metro, kilogramo, segundo), adoptado oficialmente en 1935, el cual dio lugar, después de ser ampliado, al Sistema Internacional en 1960 (Segovia y Rico, 2011).

Actualmente, en todo el mundo, la norma es utilizar el Sistema Internacional (SI) de unidades, aunque en los Estados Unidos de América se continúa en proceso de transición, desde que en 1875 se adoptara formalmente el Sistema Métrico Decimal.

El SI es el resultado del trabajo de varias organizaciones internacionales durante más de un siglo, con el que se ha conseguido un sistema de unidades de medida común para todas las áreas de la ciencia y la tecnología.

Cada estado establece adopciones y exclusiones legales de carácter formativo o industrial. En España, la Ley de Pesos y Medidas, de 8 de julio de 1892; la Ley 88/1976, de 8 de noviembre; el Real Decreto 1317/1989, de 27 de octubre, y la corrección de errores; y la Norma UNE 82100:1996 son las que se consideran. Pero, como es extraño que se penalice por no cumplirlas, es común ver aparatos destinados a medir la presión graduados en «kg/cm²» y, por ejemplo, características de calderas y refrigeradores con medidas en «calorías» y «frigorías», respectivamente.

Además de homogeneizar las transacciones científicas, técnicas y comerciales, una de las mayores ventajas de un sistema coherente de unidades, como el SI, es que facilita la comparación de valores dispares de una misma magnitud (por ejemplo, distancias microscópicas y astronómicas) y las relaciones entre las diferentes magnitudes.

En la nomenclatura científica los símbolos usados para las unidades no son abreviaturas ortográficas, son solo símbolos. En general, estos símbolos son letras simples o, excepcionalmente, parejas o tríadas.

Las normas para la correcta utilización de magnitudes, unidades y símbolos científicos las proponen las asociaciones científicas internacionales² (en este caso el Comité Internacional de Pesas y Medidas) y las adoptan las administraciones de cada estado, con el fin de facilitar los intercambios de información y las transacciones materiales (particularmente entre organismos y empresas multinacionales).

El SI está constituido por tres clases de unidades: fundamentales, derivadas y suplementarias. A una magnitud particular solo le corresponde un conjunto de unidades en este sistema.

Las unidades fundamentales son siete. Las unidades derivadas provienen de la relación algebraica (multiplicación o división) entre las unidades fundamentales. Las unidades suplementarias son un caso particular de unidades derivadas, solo existen dos, el radián y el estereorradián, que corresponden a las magnitudes *ángulo plano* y *ángulo sólido* respectivamente.

La Conferencia General de Pesos y Medidas, además, ha admitido el uso de otras unidades que, sin pertenecer al SI, son importantes y ampliamente utilizadas en todo el mundo. Esta admisión es temporal y, por eso, se conocen como unidades temporales. Algunos ejemplos de estos tipos de unidades son los que figuran en los cuadros siguientes:

UNIDADES FUNDAMENTALES

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s

2. La información actualizada respecto de las unidades, sus relaciones y las normas de uso se puede encontrar en la página web del Bureau International des Poids et Mesures, <http://www.bipm.org/>.

intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

UNIDADES DERIVADAS

Sin nombre especial		
MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
superficie	metro cuadrado	m ²
volumen	metro cúbico	m ³
velocidad	metro por segundo	m/s
aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s ²
Con nombre especial		
frecuencia	hertz	Hz
fuerza	newton	N
potencia	watt	W
resistencia eléctrica	ohm	Ω

UNIDADES ACEPTADAS QUE NO PERTENECEN AL SI

MAGNITUD	NOM	SÍMBOL
masa	tonelada	t
tiempo	minuto, hora	min, h
temperatura	grado Celsius	°C
volumen	litro	L o l

UNIDADES DE USO TEMPORAL

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
longitud	angstrom, milla náutica	Å
energía	kilovatio hora	kWh
superficie	hectárea	ha
presión	bar	bar
radioactividad	curie	Ci
velocidad	nudo	

UNIDADES DESAPROBADAS POR EL SI

MAGNITUD	NOMBRE	SÍMBOLO
presión	atmósfera	atm
energía	caloría	cal
fuerza	kilogramo - fuerza	kgf

Prefijos en el SI

Para no tener que utilizar números demasiado grandes o demasiado pequeños, el SI admite el uso de múltiplos y submúltiplos de las unidades, que se indican mediante unos prefijos que se anteponen al nombre de la unidad y a su símbolo. Para denominar un múltiplo o submúltiplo de una unidad compuesta se recomienda usar solo un prefijo; si la unidad compuesta es un cociente, el prefijo nunca debe acompañar a la unidad que se encuentra en el denominador.

MÚLTIPLOS		
Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da

SUBMÚLTIPLOS		
Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-18}	atto	a

Normas del SI

Cualquier lenguaje contiene reglas para escribirlo que evitan confusiones y facilitan la comunicación. El SI tiene reglas propias de escritura que permiten una comunicación correcta.

En cuanto a los símbolos:

- Se escriben con caracteres romanos rectos.
- Se utiliza letra minúscula excepto los derivados de nombres propios (N, Hz).
- No van seguidos de punto ni toman *s* para el plural (17 m).
- No se debe dejar espacio entre el prefijo y la unidad (nanómetro: nm).
- El producto de dos símbolos se indica mediante un punto.

En cuanto a las unidades:

- Si el valor se expresa con letras, la unidad también (diecisiete metros).
- Las unidades derivadas de nombres propios se escriben igual que el nombre propio pero con minúsculas (dos newtons).
- Los nombres de las unidades toman una *s* en el plural, salvo si acaban en determinadas consonantes (tres metros, dos bares, veinte hercios).

2. Formalización de los conceptos de magnitud y medida

El esquema matemático que se necesita para abordar la definición formal de magnitud y medida es el siguiente: una magnitud es un conjunto cuyos elementos se denominan cantidades de la magnitud y en el que se definen unas operaciones y un orden; una medida es una aplicación que a cada una de las cantidades le asigna un número. Este número será la medida de ese elemento.

Hará falta pues, determinar este conjunto, las cantidades correspondientes y la aplicación llamada medida.

2.1. Concepto de magnitud

Definiremos una magnitud a partir de un conjunto S . Determinar este conjunto, en general, puede resultar complicado. Acompañaremos la definición con un ejemplo, la longitud. S será el conjunto de todos los objetos que tienen longitud. En este conjunto hay que definir una relación binaria de equivalencia R que relacionará los elementos del conjunto. En el caso de la longitud, esta RBE relacionará los objetos que tienen la misma longitud. Mediante esta relación, obtenemos el conjunto S/R denominado conjunto cociente, donde los elementos son ahora clases de equivalencia. Cada una de estas clases estará formada por todos los elementos que por medio de esta RBE son equivalentes. Para el ejemplo elegido, estas clases estarán formadas por todos los objetos con la misma longitud, es decir, el elemento en sí ya no es importante, lo es su longitud, y obtenemos así la característica que interesa. Por lo tanto, las clases de equivalencia son cantidades de longitud. Una cantidad de longitud la pueden tener muchos objetos.

Para que el conjunto cociente anterior sea una *magnitud*, necesitamos definir en él una operación interna, una relación de orden y una operación externa, que cumplan las siguientes condiciones:

1. La operación interna tendrá las propiedades asociativa y conmutativa.
2. La relación de orden será compatible con la operación anterior.

3. La operación externa nos dirá cuántas veces una cantidad es más «grande» que otra. Se formaliza a partir del producto de una cantidad de magnitud por un número no negativo (real o natural), es distributiva respecto de la adición de números y de la operación interna anterior y es compatible con la relación de orden definida.

Con todas estas condiciones se dice que S/R es una magnitud. Observemos que esta definición corresponde a las magnitudes escalares.

La definición de operación externa se refiere a magnitudes escalares continuas si el conjunto numérico que utilizamos es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y a magnitudes escalares discretas si es \mathbb{N} .

Este procedimiento se repite de manera análoga para construir las otras magnitudes que se estudian en la escuela.

Una formalización más extensa del concepto de magnitud se puede encontrar en Pérez, Alcalde y Lorenzo (2014).

2.2. Medida de una magnitud

Medir será el acto mediante el cual se asigna un número (natural o real no negativo) a una cantidad de magnitud. Este acto (independientemente del instrumento de medida, contexto y condiciones ambientales) matemáticamente es una aplicación que asocia las clases de equivalencia del conjunto cociente anteriormente definido con los números naturales o con los números reales no negativos, según el caso.

Formalmente, se denomina *medida* de una magnitud escalar continua S/R a cualquier aplicación biyectiva $m: S/R \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que conserva las operaciones definidas y que es compatible además con el orden. En el caso de las magnitudes discretas $m: S/R \rightarrow \mathbb{N}$.

Por lo tanto, la medida nos permite asociar las cantidades de una magnitud escalar con números que, a la vez, se pueden representar por puntos sobre una semirrecta (estos puntos se situarán en el lugar de los números naturales, en el caso de magnitudes discretas, y en todos los puntos de la semirrecta real no negativa, en el caso de continuas).

Las magnitudes llamadas vectoriales no satisfacen los axiomas de orden que verifican las escalares y, en consecuencia, no se pueden representar por puntos de una recta. Estas magnitudes no se pueden relacionar, por lo tanto, con valores reales no negativos para dar la medida. Además, hay que dar información de la dirección en la cual se aplican y del sentido, componentes que no tienen las magnitudes escalares. Ejemplos de este tipo de magnitudes pueden ser la velocidad, la aceleración, la fuerza...

2.3. Unidad de medida

Dada una magnitud escalar continua S/R y una medida $m: S/R \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se denomina *unidad de medida* de m la cantidad $[n] \in S/R$ / $m([n]) = 1$. Análogamente, se definirá la unidad para las magnitudes discretas.

3. La iniciación de la medida en el aula de infantil

3.1. Consideraciones previas

La pregunta que nos podemos hacer al tratar un tema dedicado a cuestiones de una repercusión tan importante como las que se expresan en la introducción histórica y que a lo largo de los tiempos ha supuesto tantos esfuerzos hasta que se ha conseguido un mínimo de consenso internacional, es «¿qué sabe el alumnado de educación infantil antes de entrar al aula sobre las magnitudes y su medida?». Es cierto que son conceptos que pueden parecer lejanos a su desarrollo cognitivo, pero lo que parece también cierto es que están rodeados de referentes que tienen mucho que ver con la medida de magnitudes. Cuando van con sus familiares a hacer la compra hay referencias a diferentes magnitudes, por ejemplo, a la capacidad de los recipientes de líquidos que se adquieren, a la masa que puede tener el producto que quieren comprar..., y al sistema monetario también. Todavía más, en el coche que seguramente han subido muchas veces, hay un instrumento que marca qué longitud se ha recorrido y quien lo conduce hará alusiones a ella; o en la televisión, se habla de marcas de tiempos en deportes y para ello es necesario aclararles que el tiempo es algo que se mide con relojes que se llevan en la mano, pero que también están colgados en las paredes o encima de un mueble o en los electrodomésticos y que hay de dos tipos, unos llevan unas manecillas, otros no...

Es evidente que no podemos hablar de ausencia de nociones de magnitudes en ellos y ellas, ahora bien, es evidente también que no tienen una idea formada de manera reflexiva y contrastada de lo que son y suponen estas. No será a lo largo de educación infantil cuando se construirán totalmente estos conceptos. Nos hará falta solo iniciar el camino, vislumbrar las primeras luces de lo que significa una magnitud y su medida, para acabar de fundamentarlas bien en el aula de primaria.

En el apartado 2 de este tema se habla de la formalización de los conceptos de magnitud y medida. Es evidente que no se puede realizar un trabajo de este nivel en las aulas de infantil o primaria, pero como docentes es interesante saber cómo, desde un concepto tan genérico como la relación binaria de equivalencia y la formación a partir de ella del conjunto cociente, cuyos elementos son las clases de equivalencia, se llega a la construcción de una maquinaria matemática que da respuesta a todo lo que supone analizar y construir de manera general los conceptos del tema.

Resulta curioso cómo la práctica más elemental de la iniciación a la idea de medida en las aulas de infantil o primaria mantiene paralelismos con estas construcciones más formales o teóricas. Si cogemos el ejemplo de la necesidad de una unidad patrón, esto se manifiesta cuando se quiere comunicar lo que se ha hecho en clase (por ejemplo, al comparar las capacidades de dos recipientes grandes con vasos diferentes) a sus padres y madres en casa o a otros compañeros/as de las aulas de al lado, porque la necesidad de entendernos nos lleva a la de disponer de una unidad común conocida y utilizada por todo el mundo. Y este hecho se pone de manifiesto espontáneamente. Todo esto claro está, manipulando, comparando, estimando...

Por lo tanto, la medida será la herramienta matemática que nos permite cuantificar la realidad formada por materiales continuos. Como la unidad elegida para medir puede variar para la misma magnitud, el resultado de la medida dependerá de esta, es decir, será relativo a la unidad utilizada. Este hecho hace más complicada para el alumnado escolar la tarea de medir que la de contar. Además, a veces también es necesario utilizar instrumentos especiales y complicados para los niños y las niñas, lo que todavía dificulta más este trabajo.

Para avanzar en el desarrollo de todas las nociones relacionadas con la medida debemos ir creando en el alumnado la idea de magnitud como todo aquello susceptible de poder ser medido y también que, para hacerlo, necesitamos las unidades de medida, los números, la idea de división de un todo en partes agregadas, el transporte de la unidad sobre la cantidad a medir y su repetición todas las veces que sea necesario.

3.2. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil

Cómo establecer los primeros pasos de una manera secuencial y adecuada a la educación infantil respecto de la medida será el objetivo del tema, que contribuirá a desarrollar en el alumnado las siguientes capacidades:

1. Comparar objetos diferentes por sus dimensiones para establecer los contrastes: grande-pequeño, largo-corto, alto-bajo, ancho-estrecho, grueso-delgado.
2. Comparar objetos diferentes por su peso para establecer las nociones: pesado-ligero.
3. Comprobar con la balanza anticipaciones intuitivas realizadas sobre el peso de diferentes objetos.
4. Relacionar cantidades de materiales continuos sólidos por la semejanza (tan _ como) o por la diferencia (más _ que, menos _ que).
5. Construir (manipulativa y gráficamente) objetos de diferentes dimensiones.
6. Trasvasar materiales continuos líquidos o áridos entre recipientes de diferente tamaño, comparando la capacidad de los mismos.
7. Relacionar por la semejanza o por la diferencia varios recipientes con varias cantidades de materiales continuos líquidos o áridos.
8. Establecer relaciones de equivalencia y de orden en función de la longitud, la capacidad y la masa.
9. Iniciar experiencias de medida de longitudes, capacidades y masas.

10. Realizar transformaciones que modifiquen y que no modifiquen una cantidad (con materiales continuos).
11. Captar, por medio de situaciones cotidianas, las nociones básicas relacionadas con el tiempo.
12. Situar en el tiempo diferentes hechos cotidianos.
13. Representar secuencias temporales por medio de dibujos sucesivos.
14. Ordenar secuencias temporales representadas gráficamente.
15. Comparar la duración del tiempo en dos acciones diferentes.
16. Identificar una hora, un día, una semana.

3.3. Desarrollo de las capacidades

Con las mismas consideraciones del apartado 3.3 del tema 1, estudiaremos a continuación los procedimientos para construir los primeros conceptos referentes a magnitudes y medida en el aula de educación infantil.

1. *Comparar objetos diferentes por sus dimensiones para establecer los contrastes: grande-pequeño, largo-corto, alto-bajo, ancho-estrecho, grueso-delgado*

Esta capacidad ha sido trabajada en el tema 1, concretamente en la capacidad 1, pero la hemos incluido también aquí porque el conocimiento de estas características de los objetos y las comparaciones entre ellas constituyen los primeros pasos para llegar más adelante a la necesidad de cuantificar exactamente las diferencias y a través de ella a la utilidad de la medida.

2. *Comparar objetos diferentes por su peso para establecer las nociones: pesado-ligero*

En esta capacidad se trabajará una de las características de los objetos que no habíamos trabajado todavía: su masa.

Hay que considerar la masa como la magnitud que mide la cantidad de materia que un cuerpo tiene. Esta resulta invariante cuando cambian condiciones de altura, presión, situación geográfica... El peso es la fuerza que la gravedad ejerce sobre un cuerpo y depende de su masa, además de otros factores. Este sí es variable en función de las características mencionadas anteriormente. La masa es la magnitud a estudiar, pero como generalmente situaremos nuestra actividad docente en un mismo entorno geográfico, la trabajaremos mediante su manifestación, el peso, que permanecerá invariable al no cambiar las condiciones anteriores.

Empezaremos este trabajo con el alumnado comparando dos objetos reales con pesos muy diferentes, pero adecuados a sus posibilidades físicas. Por ejemplo, si los niños y las niñas están ayudando para organizar el material escolar en las es-

tanterías correspondientes, pueden comparar el peso de un paquete de 500 hojas y el de uno de tiza. Hará falta que los manipulen, que los toquen y en función de la sensación que tengan, que expliquen cuál les parece más pesado. En la verbalización de las actividades utilizaremos un vocabulario que les ayude a transmitir estas experiencias: «pesa poco», «pesa mucho», «pesa más», «pesa menos». El docente puede ir utilizando también las palabras «pesado» y «ligero» sin que el alumnado tenga que dominarlas.

Más adelante, se realizará un trabajo parecido, con dos objetos cuyos pesos no sean ahora tan diferentes (por ejemplo, dos cajas de rotuladores, una de 12 y otra de 24 unidades) llegando de manera progresiva a comparar objetos que pesen igual (una caja de tizas blancas y otra de tizas de colores). En el refuerzo del vocabulario asociado ampliaremos las expresiones mencionadas antes añadiendo ahora «pesan igual».

Para realizar las estimaciones sobre el peso de los objetos hará falta que el alumnado adopte unas posiciones corporales semejantes a las de la balanza (brazos abiertos hacia los lados del cuerpo o hacia adelante y perpendiculares al tronco en los dos casos) para percibir mejor y con más claridad la diferencia de pesos (figura 67).



Figura 67. Representación de un niño en posición de balanza sopesando unas frutas

Hacia el final del ciclo compararán aleatoriamente objetos que pesen igual o diferente, aumentando la cantidad de objetos y la variabilidad de pesos. Trabajaremos siempre con objetos cotidianos y deberemos conseguir que los niños y las niñas terminen la etapa expresando correctamente las comparaciones entre los pesos de estos objetos y su condición de pesados o ligeros.

3. Comprobar con la balanza anticipaciones intuitivas realizadas sobre el peso de diferentes objetos

Esta capacidad completa el trabajo de la anterior, de forma que las dudas que se presenten cuando la diferencia de peso sea pequeña o los objetos que se comparan tengan el mismo peso, tienen que resolverse con una balanza de platos (figura 68).



Figura 68. Representación de una balanza (fabricado por Osmiroid)

Introduciremos este instrumento hacia la segunda mitad del ciclo, para comprobar las estimaciones intuitivas sobre el peso que se habían hecho con anterioridad. Pero, claro está, usar un instrumento implica saber cómo funciona. Así, una vez se presenta como la herramienta que nos ayudará a resolver nuestras dudas sobre diferencias de pesos, hay que hacer un paréntesis y manipular este nuevo aparato.

La manipulación empezará con objetos de pesos muy diferentes y a pesar de que no presentan dudas a la hora de estimar con las manos cuál pesa más o menos, los pondremos en la balanza para observar el comportamiento de los platos, comprobando que baja el que contiene el objeto más pesado y descubriendo así cómo funciona (de manera análoga a lo que ocurre con sus brazos). Después, cuando ya sea un instrumento conocido y manipulado, de manera progresiva, se usarán pesos más parecidos o también iguales (los platos quedan a la misma altura) hasta llegar a conocer las posiciones de los platos en todos los casos.

Más adelante (en la capacidad 9), las actividades se encaminarán a utilizar la balanza, ya no solo para comparar pesos, sino también para medir el peso de un objeto utilizando como unidades elementos del entorno. Después, cuando se encuentren en primaria, serán pesas convencionales las que se utilizarán para equilibrar los platos de la balanza.

4. Relacionar cantidades de materiales continuos sólidos por la semejanza (tan _ como) o por la diferencia (más _ que, menos _ que)

A lo largo del 2.º ciclo de infantil y acompañando al resto de capacidades de todas las magnitudes que se trabajan, usaremos el vocabulario que se explicita en el título de la capacidad para que el alumnado exprese correctamente las comparaciones de objetos que realice respecto de las características que conozca en cada momento: *más largo que, más bajo que, tan grueso como*, etc. Para que puedan llegar a hacerlo, en un primer momento el docente los expresará en contextos que no se presten a confusión. Por ejemplo, en situaciones de juego en las que el alumnado construya trenes o torres con bloques encajados, verbalizarán si unos son más o menos largos o altos respectivamente que otros; o también si los troncos de unos árboles del patio son más o menos gruesos que otros. Posteriormente, y de manera natural, hará falta que ellos y ellas usen estos términos.

Además de reconocer las semejanzas o diferencias entre dos objetos que tienen delante, deben trabajar también la búsqueda de entre varios de un objeto que cumpla

unas determinadas condiciones respecto de otro que les ofreceremos como modelo: *de la carpeta de los papeles charol, trae uno más ancho que este; de la caja de las cuerdas, trae una menos larga que esta; de la cesta de los palos de madera, trae uno que sea tan alto como este; etc.*

Se puede completar este trabajo manipulativo con actividades gráficas en las cuales compararán objetos representados gráficamente o tendrán que buscar alguno en una imagen con unas condiciones dadas respecto de otro, verbalizando correctamente las comparaciones (figura 69).

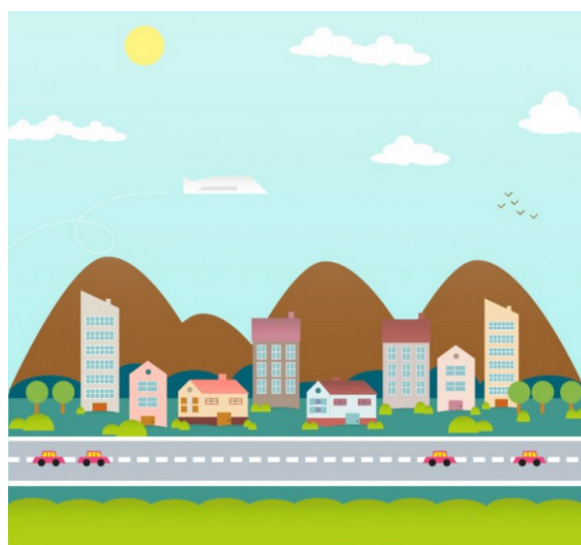


Figura 69. Representación de algunos edificios de una ciudad

5. Construir (manipulativa y gráficamente) objetos de diferentes dimensiones

Durante los dos últimos cursos del ciclo y asociado con situaciones que se presenten en el aula, lo que se pretende es que construyan objetos de diferentes dimensiones. Al principio no es una actividad libre, hay que tener un modelo delante, proporcionado por el docente, para poder observarlo, hacer lo que se pide y comprobar después que se han seguido las indicaciones de *más, menos o igual* referidas a las diferentes dimensiones de los objetos. Por ejemplo, hemos cortado una cuerda para atar un paquete y nos resulta corta, les pedimos que corten otra que sea más larga o que recorten un papel igual de ancho que otro para envolver una caja, etc.

Más adelante ya no será el docente quien les muestre el modelo, serán ellos y ellas quienes construyan diferentes objetos con las condiciones de semejanza o diferencia que se les haya propuesto. Por ejemplo, para hacer los troncos de dos árboles de un mural tienen que preparar dos cilindros de plastilina, uno más grueso que el otro o para hacer el tejado de una casa que forma parte de una maqueta tienen que cortar dos trozos de cartulina, igual de grandes.

También se puede trabajar gráficamente y que sea dibujando la manera de crear los diferentes objetos. Por ejemplo, para hacer un mural de una ciudad, les ofrecemos

imágenes de algunos edificios y ellos y ellas tienen que dibujar otros con características diferentes (de altura, de anchura, etc.) a los proporcionados.

Tanto en el trabajo manipulativo como en el gráfico debemos propiciar que el alumnado exprese correctamente las comparaciones entre objetos que aparezcan.

6. Trasvasar materiales continuos líquidos o áridos entre recipientes de diferente tamaño, comparando la capacidad de los mismos

Empezamos en esta capacidad el trabajo con materiales continuos que necesitan un recipiente para poder manipularlos: los líquidos o los áridos (granos, legumbres y otros materiales sólidos que, por cuestiones prácticas, se cuantifican mediante la medida).

En un primer momento se comparan por su capacidad recipientes de tamaños muy distintos y formas parecidas, comprobando si cabe o no el material de uno al trasvasarlo al otro. Por ejemplo, podemos comparar la capacidad de un cubo de fregar en el que hemos puesto tierra para trabajar en el huerto escolar y la de un cubo de playa que utilizaremos para transportarla. Para expresar las observaciones se usará un vocabulario adecuado, como *cabe/no cabe, lleno/vacío*.

Cuando estén claras las diferencias de los casos iniciales, compararán recipientes de tamaños menos diferentes y de formas menos semejantes como un vaso y una copa, por ejemplo, completando el vocabulario añadiendo a las expresiones anteriores la idea de *medio lleno*, cuando la situación lo requiera.

Debemos conseguir que, al finalizar la etapa de educación infantil, el alumnado sea capaz de comparar la capacidad de recipientes de formas bastante diferentes y tamaños más semejantes (envase de yogur, de crema catalana, brik de zumo, etc.) expresando correctamente lo que observan.

7. Relacionar por semejanza o por la diferencia varios recipientes con varias cantidades de materiales continuos líquidos o áridos

En este momento hemos de introducir el uso del vocabulario de las comparaciones que hemos visto en la capacidad 4: *más que, menos que, tan _ como, igual _ que*, para el caso de materiales líquidos o áridos.

Iniciaremos el trabajo en el 2.º curso del ciclo con las actividades más sencillas, comparando recipientes del mismo tamaño y formas muy parecidas con diferentes cantidades de materiales (llegarán a distintas alturas) para diferenciar *mucho _ poco* y expresar las relaciones *hay más _ que o hay menos _ que*. A continuación y con recipientes como los anteriores, compararán las mismas cantidades de materiales (llegarán a la misma altura) para observar la igualdad y expresar *hay igual _ que o hay tanto _ como*. Por ejemplo, podemos utilizar vasos o botellas de plástico con

diferentes o iguales cantidades de agua para regar las plantas de clase o el huerto escolar, si hay.



Figura 70. Representación de vasos con diferentes cantidades de agua (los dos de la izquierda) y con la misma cantidad (los dos de la derecha)

Más adelante se utilizarán recipientes de tamaños y formas distintas con diferentes cantidades de líquidos o áridos para observar las diferencias y con las mismas cantidades de materiales para que descubran la igualdad. Esta última se podría considerar la comparación más complicada y las razones son obvias. En este caso se puede hacer necesario utilizar algún instrumento (vaso, bote, etc.) como unidad de medida para comprobar con ella lo que intuyen en estas comparaciones o para desmentir lo que aseguran equivocadamente.

A lo largo de todas estas actividades el alumnado debe ir utilizando el vocabulario asociado a ellas de manera correcta y natural.

8. Establecer relaciones de equivalencia y de orden en función de la longitud, la capacidad y la masa

En las capacidades 13 y 15 del tema 1 ya se trabajaron relaciones de equivalencia y de orden con la longitud y el tamaño de los objetos. Siguiendo los mismos pasos que en aquel tema se establecían, habrá que incorporar ahora las características de los objetos que se asocian a su masa y las de los recipientes que se derivan de su capacidad, para utilizarlas como criterios de clasificaciones o de ordenaciones del mismo modo que se ha hecho en las anteriores dos magnitudes.

Este trabajo se realizará a lo largo de todo el ciclo, teniendo en cuenta que con la masa el avance es más lento que con las otras magnitudes y que, a diferencia de estas, para las que no necesitamos ningún instrumento que haga de intermediario, nos tendremos que ayudar de la balanza para hacer las comparaciones que nos permitan establecer las relaciones entre las masas trabajadas.

9. Iniciar experiencias de medida de longitudes, capacidades y masas

A partir de esta capacidad ya no es suficiente la comparación de objetos respecto de estas propiedades físicas, ahora se busca una cuantificación concreta y precisa de las diferentes magnitudes mediante su medida.

Hacia la segunda mitad del ciclo intentaremos encontrar situaciones reales idóneas para crear la necesidad que nos lleve a medir cualquiera de las tres magnitudes. Estas situaciones pueden estar inmersas dentro de otras o de proyectos de trabajo o de acciones más globales que puedan tener otro objeto de interés. En la medida que se contextualice el trabajo de este modo, las experiencias cobrarán un sentido añadido, lo cual no se conseguiría si se desarrollaran aisladamente.

Respecto de la *longitud*, por ejemplo, si necesitamos sacar la mesa de la maestra al pasillo para hacer una exposición de trabajos del alumnado, podemos preguntarles cómo averiguar si la mesa cabrá por la puerta, teniendo en cuenta que pesa mucho y es un gran esfuerzo arrastrarla para comprobarlo directamente. En una situación de este tipo es conveniente que no haya en el aula ningún objeto que sea más largo que la mesa y la puerta (por ejemplo, un trozo de cuerda, un palo, una regla...) que nos permita responder la pregunta con una simple comparación. Nuestro interés es conseguir que propongan algún objeto como unidad de medida que sea necesario repetir varias veces para recubrir las longitudes a medir.

Como todavía no estamos pensando en introducir las unidades convencionales, se pueden utilizar dos tipos de unidades:

- Unidades naturales: aquellas que derivan del propio cuerpo, por ejemplo pies, palmos, codos...
- Unidades arbitrarias: aquellas que pueden tomar de su alrededor, como por ejemplo lápices, bolígrafos, palitos, cuerdas o cualquier objeto parecido.

El procedimiento consiste en colocar, una junto a la otra, todas las unidades de medida que sean necesarias para *recubrir* totalmente las longitudes a medir. En el ejemplo anterior y suponiendo que han elegido los pies de los niños y las niñas como unidad de medida, lo que harían es colocar los pies de varios alumnos recubriendo las dos longitudes que se quiere medir y, después de contabilizar los pies de cada una, hacer la comparación correspondiente para poder resolver su duda. En este trabajo tenemos que insistir en la necesidad de expresar el resultado obtenido utilizando el número y la unidad elegida para medir. Así, no dirán que la mesa mide 4 y la puerta 7, sino que la mesa mide «4 pies» y la puerta «7 pies» y, por lo tanto, sí se puede sacar la mesa al pasillo (figura 71).

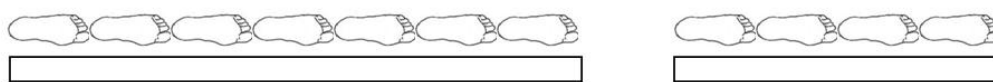


Figura 71. Representación del cálculo experimental de la medida de las longitudes de una mesa y una puerta con varios pies iguales

Está claro que estamos usando unidades de medida no homogéneas (los pies de los niños y las niñas no son exactamente igual de largos) pero podemos obviar estas diferencias con el fin de insistir en la idea de unidad de medida por encima de otras cuestiones.

Si al averiguar las medidas de las longitudes se obtuvieran números muy elevados para los conocimientos del alumnado, se podría repetir la medida con una unidad más larga para obtener números más pequeños o bien se haría la comparación mediante una correspondencia biunívoca asociando uno a uno los pies de las dos longitudes hasta que se acabaran los de una de ellas y decidiendo entonces cuál es la más larga.

Si se produce una situación en la cual la cantidad de unidades que se utilizan no recubre exactamente la longitud a medir, se podría también repetir la medida con otra unidad para intentar mejorar la exactitud o expresar la medida con «7 pies y un trozo» o bien despreciar el trozo que quede sin recubrir si este es poco importante en el resultado final.

Cuando estas primeras experiencias de medida estén trabajadas y utilizando el mismo tipo de unidades, se les puede plantear una pregunta sobre la posibilidad de medir longitudes con un solo objeto como unidad (un único pie, un único lápiz...). La respuesta nos tiene que llevar a averiguar la medida *transportando* esta unidad a lo largo de la longitud a medir tantas veces como sea necesario para recorrerla completa (figura 72). En este caso, y para saber el resultado de la medida, irán señalando con una raya cada vez que transportan la unidad, visualizando de este modo y una vez finalizada la medición, cuántas veces la longitud total contiene a la unidad elegida.

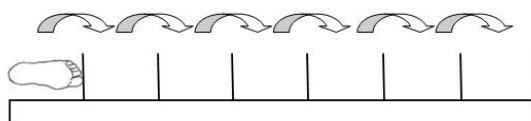


Figura 72. Representación del cálculo experimental de la medida de la longitud de una mesa mediante el transporte de una sola unidad haciendo marcas

Más adelante ya no será necesario marcar las rayas que nos señalan las veces que se repite la unidad, sino que se hará un recuento simultáneo con la acción de transportarla, obteniendo al final el número que nos da el resultado de la medida (figura 73). Insistiremos en la necesidad de expresar este resultado dando el número y la unidad utilizada como hemos comentado antes.

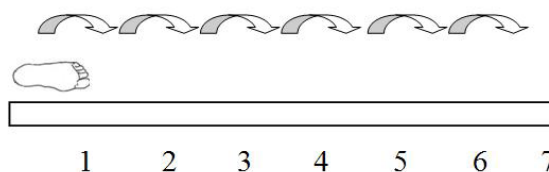


Figura 73. Representación del cálculo experimental de la medida de la longitud de una mesa contabilizando el transporte de una sola unidad de longitud

Hacia el final de la etapa habrá que iniciar alguna actividad que les haga ver la dependencia de la medida respecto de la unidad elegida. Si seguimos con el ejemplo de la mesa y la puerta, podemos hacer grupos en clase y que cada uno de ellos mida

las longitudes con unidades diferentes (unos con pie, otros con palmos, otros con barritas de tiza, etc.), observando después la disparidad de resultados (la mesa mide 4 pies, 3 palmos, 6 barritas de tiza) y reflexionando sobre este hecho para conseguir una explicación razonada del mismo. Posteriormente, en primaria, se retomará este tipo de actividades para justificar la introducción de las unidades convencionales.

Respecto de la *capacidad*, seguiremos un procedimiento totalmente análogo al desarrollado para la longitud. Así, se iniciarán experiencias de medida de la capacidad a partir también de necesidades creadas en situaciones reales y utilizando ahora como unidades vasos, botes o cajas de nuestro contexto habitual para medir los materiales líquidos o áridos con los que trabajamos.

Podemos empezar, por ejemplo, con la comparación de las cantidades de zumo que hay en dos jarras diferentes que hemos preparado para una merienda en clase. Utilizaremos como unidad tantos vasos iguales como sea necesario para vaciar el contenido de cada una de las jarras y haremos después la comparación teniendo en cuenta todas las consideraciones que hemos hecho antes para el caso de la longitud (figura 74).



Figura 74. Representación del cálculo experimental de la medida de la capacidad de dos jarras con varios vasos iguales

Más adelante se utilizará un objeto solo para realizar estas mediciones. Del mismo modo que se hacía con la longitud, iremos poniendo marcas cada vez que se llene la unidad al realizar la medida y las contaremos después para hacer la comparación. Finalmente, habrá que ir haciendo el recuento simultáneo sin necesidad de anotar nada.

A lo largo de todo este trabajo insistiremos también en la necesidad de expresar el resultado de cualquier medida utilizando el número y la unidad elegida para medir. Además, realizaremos actividades que pongan de manifiesto que, del mismo modo que pasaba en la longitud, el resultado obtenido al medir depende de la unidad de medida elegida.

Respecto de la *masa*, será conveniente esperar hasta el último curso de la etapa para trabajarla. Como hemos explicado en la capacidad 3, nos ayudaremos de la balanza para comparar las masas de diferentes objetos y para aclarar más tarde cuánto pesa exactamente uno más que otro.

Así, se harán actividades encaminadas a equilibrar los platos de la balanza poniendo un objeto en uno de ellos y varios objetos iguales, que serán las unidades de medida, en el otro. Por ejemplo, la receta de un pastel de manzana y nueces que haremos en el aula nos indica que hemos de poner el mismo peso de ambos ingredientes. Por lo tanto, necesitamos saber cuántas nueces nos hacen falta para igualar el peso de una manzana. Para averiguarlo usaremos la balanza, equilibrando sus platos al poner la manzana en uno de ellos y las nueces necesarias en el otro. Habrá que expresar siempre los resultados con el número y la unidad (la manzana pesa 7 nueces, por ejemplo) y realizar comprobaciones que pongan de manifiesto la dependencia del resultado de la medida respecto de la unidad utilizada. Así, pueden pesar también la manzana con higos secos, cerezas, cuadraditos de chocolate y reflexionar sobre los diferentes resultados que se obtienen.

10. Realizar transformaciones que modifiquen y que no modifiquen una cantidad (con materiales continuos)

De manera análoga a la capacidad 3 del tema anterior, esta también pretende ayudar a los niños y las niñas a reflexionar sobre los diferentes efectos de las distintas transformaciones que podemos aplicar a las cantidades de materiales, en este caso continuos.

Se trabajará solo en el último curso del ciclo, comparando y contrastando situaciones en las cuales no se modifique la cantidad con otras en las cuales sí se modifique (de añadir o de quitar).

Frente a situaciones en las cuales solo se cambia la distribución espacial o la apariencia de los elementos (se enrolla una cuerda que estaba estirada; se cambia el agua de una botella a una jarra; se convierte en rosquilleta una pelota de plastilina; etc.) en las que no se modifican las cantidades iniciales, presentaremos otras en las que haya acciones de añadir o de quitar material (cortamos un trozo de una cuerda; añadimos al agua de un cubo un poco de agua del grifo; quitamos un pellizco de la plastilina de una bola para hacer un muñeco, etc.) y, por lo tanto, se producen modificaciones de las cantidades. Pretendemos que el alumnado reflexione sobre estas situaciones y que llegue a descubrir que solo se modifica una cantidad cuando añadimos o quitamos material y nunca en los otros casos. Es decir, pretendemos que el alumnado sea capaz de conseguir una *conservación razonada de la cantidad de materiales continuos*, que no se deje confundir por percepciones o apreciaciones equivocadas al respecto.

Esta pretensión resulta bastante más difícil de lograr que en el caso de los materiales separados, dado que seguramente la mayoría del alumnado de infantil no llegará a entender la cuestión para los continuos. Su tratamiento se retoma en los primeros cursos de primaria con la intención de que los niños y las niñas interioricen este pensamiento y dominen los cambios de cantidades y sus causas en todo lo que se refiere a materiales continuos.

11. Captar, por medio de situaciones cotidianas, las nociones básicas relacionadas con el tiempo

Cuando se habla del tiempo, se debe tener en cuenta que esta magnitud tiene un carácter especial y que su desarrollo es muy diferente al de las otras estudiadas. Por ello su iniciación a nivel experimental y práctico no tiene nada que ver con el trabajo realizado anteriormente en aquellas y la adquisición competencial de esta magnitud sigue un proceso más lento que los de las otras.

Nos pondremos como objetivo ayudarles a observar el paso del tiempo, a descubrir que muchos de los hechos que ocurren todos los días siguen una misma secuencia y a situarse y situar acciones en el tiempo, mediante lo que podemos denominar coordenadas temporales. Entonces habrá que ir creando en el alumnado una red de referentes temporales que su consciente pueda asimilar y que les permita conseguir todo lo mencionado antes.

Desarrollaremos este trabajo desde el inicio del 2.º ciclo de educación infantil empezando por el tratamiento de las diferencias entre el día y la noche. En un primer momento se buscarán referencias estables (la claridad o la oscuridad del color del cielo, la presencia o la ausencia de luz natural...) que siempre se dan y que no dependen de si el día está soleado o nublado o de las fases de la Luna. Como complemento de estos referentes, resaltaremos la presencia del Sol en el cielo durante la mayoría de los días y de la Luna en algunas noches. La referencia a las estrellas, que en principio siempre están relacionadas con la noche, se ve obstaculizada por la contaminación lumínica en las ciudades y la imposibilidad de verlas con facilidad. Habrá que relacionar el día y la noche con los hechos cotidianos que realiza el alumnado (ir al colegio, comer, jugar, dormir...), para ayudarles a que los sitúen de manera rutinaria en alguno de los referentes temporales estudiados.

Para ampliar estas cuestiones iniciales y relacionado con el paso del tiempo y, por lo tanto, con el presente, el pasado y el futuro, se trabajarán los conceptos *antes*, *ahora* y *después*. Nos aproximaremos a estas referencias temporales a partir del presente, con la utilización de la palabra *ahora* para referirnos al instante en el cual ocurre lo que estamos haciendo en ese mismo momento, por ejemplo, si preguntamos a un niño qué está haciendo y nos responde, «Comer mi bocadillo», insistiremos en verbalizar «Ahora estás comiendo el bocadillo». Para introducir las otras expresiones deberemos enlazar lo que estamos haciendo con lo que acabamos de hacer (pasado) o con lo que haremos cuando finalicemos (futuro) y, así, incluir en nuestro vocabulario y dotar de sentido las expresiones *antes* y *después* para indicar estos momentos y para que el alumnado vaya incorporándolas al suyo. En el mismo ejemplo anterior, si preguntamos a algún niño qué acaba de hacer y nos responde «Lavarme las manos», nosotros diremos «Antes de comer nos lavamos las manos» y si le preguntamos qué hará cuando acabe de comer y nos responde «Guardar el saquito en la mochila», nosotros diremos «Después de comer guardamos el saquito en la mochila».

Relacionado con estos referentes temporales y tomando como referencia el tiempo de la comida y los conceptos de día y noche, se amplía el trabajo anterior con la in-

roducción de *por la mañana* como la parte del día que transcurre antes de comer, *por la tarde* como la parte del día que se sitúa después de comer y antes de que el cielo se vuelva oscuro y *por la noche* como la parte del día que ya tienen identificada y asociada con la oscuridad del cielo. Los tipos de situaciones y las preguntas que les podemos formular son del mismo estilo que las expresadas anteriormente.

En el último curso del ciclo se trabajan los conceptos de *ayer*, *hoy* y *mañana*, centrandone nuevamente la atención en el momento presente, *hoy*, e identificando *ayer* como el día antes de hoy y *mañana* como el día después de hoy. Para trabajar estas nociones nos ayudaremos de las rutinas diarias que se hacen en el aula con el calendario para poner la fecha, de los cumpleaños del alumnado, de las excursiones previstas, etc. (figura 75), que nos permitirán observar con ellos los días que pasan, los que faltan para ir al circo, los que hace que fuimos a la granja escuela, etc., y que darán sentido a las expresiones asociadas «ayer, hoy y mañana».



Figura 75. Calendario magnético (fabricado por HenBea)

Estos referentes temporales cuestan más de distinguir y asimilar que los anteriores, especialmente la idea de mañana, que les crea muchos problemas porque les parece que no existe, ya que cuando preguntan si «ya es mañana» resulta que es «otra vez hoy». Probablemente, la mayor parte del alumnado terminará la etapa de infantil sin haber comprendido completamente estas últimas nociones temporales, pero normalmente las dificultades se resuelven en primero de primaria.

Hay que establecer también las diferencias entre los días laborables, los de colegio, y los días de fin de semana, que son no lectivos para los niños y las niñas, al igual que los días festivos especiales que aparecen a veces entre los días laborables.

Prestaremos atención también a las estaciones del año, sobre todo a los cambios que se producen al pasar de una a otra, observando las diferentes temperaturas, las comidas que también son diferentes, la ropa que llevamos en cada una de ellas y las actividades que se desarrollan tanto en la escuela como en casa y que no serán tampoco iguales en las diferentes estaciones. Utilizaremos los nombres de las estaciones de manera habitual, para que el alumnado los integre en su vocabulario de forma natural.

A lo largo de todo este trabajo tendremos que informar a los padres y las madres de lo que estamos haciendo en el aula y pedir su ayuda para reforzar en casa las nociones temporales que se desarrollan en la escuela y trabajar las que no se presentan.

12. Situar en el tiempo diferentes hechos cotidianos

Esta capacidad está totalmente ligada a la anterior y se refiere a la necesidad de contextualizar todo el trabajo que en ella desarrollamos mediante actividades cotidianas.

Será esencial, por tanto, estudiar las nociones temporales básicas relacionándolas con las distintas actividades que el alumnado realiza de forma habitual en los diferentes momentos del día. Esta relación se trabajará a lo largo de todo el ciclo y resulta muy importante que se verbalice correctamente utilizando las expresiones correspondientes asociadas a todos los referentes temporales estudiados. Así, por ejemplo, vamos a la escuela cuando es de día, dormimos en casa cuando es por la noche, desayunamos por la mañana, merendamos por la tarde, hoy es mi cumpleaños, ayer estaba enfermo de las anginas, mañana es fiesta, estamos en invierno porque hace mucho frío, en verano vamos a la playa...

Además de este trabajo que se refiere puntualmente a situar en el tiempo algunos hechos aislados, es muy importante potenciar también la narración por parte de los niños y las niñas de diferentes actividades o situaciones que han vivido a lo largo del día, para observar si utilizan adecuadamente las expresiones relacionadas con el paso del tiempo y si el relato está claro y sigue un orden temporal lógico.

13. Representar secuencias temporales por medio de dibujos sucesivos

Como hemos comentado en la capacidad anterior, además de conocer los referentes temporales trabajados hasta ahora, el alumnado de infantil debe ser capaz de ordenar en el tiempo de manera lógica una sucesión de hechos que han tenido una determinada continuidad.

Así, completaremos el trabajo verbal mencionado anteriormente introduciendo el de representación gráfica que puedan hacer los niños y las niñas y que se planteará como una manera de recordar lo que ha pasado o de poder guardarlo por si nos hace falta más adelante o de poder mostrarlo a otras personas. Empezaremos partiendo de un hecho que acaba de ocurrir en el aula (la narración de un cuento o de una historia personal, la realización de un juego, la interpretación de una canción...) y pidiéndoles que representen gráficamente, con secuencias ordenadas, aquello que les ha parecido más interesante y que se refiere a momentos importantes de lo que ha sucedido.

Se trabaja normalmente en los dos últimos años de la etapa y se empieza pidiendo que representen dos o tres escenas o momentos para intentar llegar hacia el final del ciclo hasta cuatro o cinco escenas. Es importante que el alumnado explique después de hacer los dibujos qué es lo que ha representado y por qué lo ha hecho así, lo que les ayudará a mejorar y perfeccionar sus capacidades de expresión verbal y gráfica.

14. Ordenar secuencias temporales representadas gráficamente

En esta capacidad no se trabaja a partir de un hecho ocurrido en el aula, sino de una historia que mostramos a los niños y las niñas representada en diferentes imágenes desordenadas y que deben entender y ordenar. Es necesario escuchar la interpretación que hacen de lo que ven en las imágenes para poder ayudarles si lo necesitan antes de que intenten ordenarlas.

Prestaremos una atención especial a las secuencias que pueden ordenarse tanto de manera ascendente como descendente (vestirse/desvestirse, por ejemplo) aceptando cualquiera de las dos si el niño o la niña lo explica correctamente, así como a las que se refieren a hechos que son cíclicos (el ciclo del agua o los gusanos de seda, por ejemplo) y que pueden ordenarse empezando y acabando por diferentes imágenes.

Se trabaja también en los dos últimos cursos de infantil y, del mismo modo que en la capacidad anterior, se empieza por secuencias con dos o tres escenas, con la intención de llegar hasta cinco o seis. Podemos ayudarnos de materiales didácticos comercializados como el que se muestra en la figura 76.



Figura 76. Secuencias temporales Zaro y Nita (fabricado por Akros)

15. Comparar la duración del tiempo en dos acciones diferentes

Como hemos comentado en la capacidad 11, el desarrollo de la magnitud tiempo en el alumnado no es igual que el de las otras magnitudes. En este sentido, la aproximación a la medida del tiempo que se hace en esta etapa no sigue los mismos pasos que hemos visto para la longitud, la capacidad y la masa.

Inicialmente vamos a comparar las duraciones de dos acciones diferentes, como paso previo para llegar más tarde a la medida del tiempo.

En un primer momento, el alumnado comparará la duración del tiempo en dos acciones simultáneas que empiezan a la vez y acaban con una gran diferencia

temporal (un niño empieza a pintar un árbol al mismo tiempo que otro empieza a comerse un bocadillo, por ejemplo) observando que dura menos tiempo la acción que termina antes de las dos y más tiempo la que termina después. Acompañando las acciones y mientras habla con el alumnado de lo que está ocurriendo, el docente verbalizará adecuadamente *ha durado o ha tardado mucho/poco tiempo, más/menos tiempo...*, con la intención de que los niños y las niñas utilicen también estas expresiones cada vez con más acierto y corrección (Raúl ha tardado más tiempo en comerse el bocadillo que Jordi en pintar el árbol, por ejemplo).

Más adelante habrá que comparar también la duración del tiempo en dos acciones simultáneas con unas diferencias temporales no tan grandes como las de antes, que vayan tendiendo a la igualdad hasta llegar a ella. Completaremos el vocabulario anterior añadiendo *ha durado o ha tardado el mismo tiempo, ha durado o tardado igual*, intentando que ya lo usen ellos y ellas sin problemas.

Será necesario comparar también la duración del tiempo en dos acciones no simultáneas, sabiendo que siempre estará presente el problema de la subjetividad en la percepción del paso del tiempo y que no podremos convencer al alumnado de que hemos estado más tiempo en el patio que haciendo alguna tarea en el aula, por ejemplo, mientras no dispongamos de algún instrumento ajeno a nosotros, que nos permita objetivar el paso del tiempo y poder afirmar sin errores de percepción si una acción ha durado más o menos que otra.

Precisamente con la introducción de este instrumento, y en el último curso de la etapa, cuando los niños y las niñas ya se relacionan mejor con el tiempo, será el momento de objetivar su duración, lo que no quiere decir todavía usar instrumentos para medirlo, sino solo para comparar las duraciones y poder estar seguros de qué periodo dura más que otro o si duran igual.

Con esta finalidad utilizaremos por ejemplo los relojes de velas, de arena o de agua. El funcionamiento de estos tres instrumentos es muy parecido y el procedimiento para introducirlos en el aula también lo es. Lo explicaremos para el caso de las velas.

Necesitaremos dos velas exactamente iguales y las dispondremos en una base sobre la cual queden en posición vertical (chapa de madera con dos agujeros para meterlas dentro, por ejemplo). Pondremos una cartulina detrás de ellas y unida a la base, para poder hacer marcas que indiquen las alturas de las velas.

En primer lugar, y para validar el funcionamiento de este dispositivo en las comparaciones objetivas de duraciones de tiempos no simultáneos que hagamos, observaremos en clase cómo se comportan las velas cuando comparamos dos acciones simultáneas. Marcaremos en la cartulina una raya indicando la altura de las dos velas (que será la misma) y las encenderemos cuando empiecen las dos acciones. Apagaremos cada una de ellas cuando finalice la acción que le corresponde y volveremos a marcar otras rayas indicando ahora las nuevas alturas de las dos velas. El alumnado sabe qué acción ha durado más y cuál ha durado menos tiempo porque han empezado a la vez y, al observar las marcas de la cartulina, comprobarán que la vela que se

ha quemado mucho corresponde a la acción que ha durado más tiempo y la que se ha quemado poco está asociada a la acción que ha durado menos tiempo (se compara la vela que se ha quemado y no la que queda para evitar relaciones inversas que puedan complicar la interpretación de los niños y las niñas).

Una vez comprobado y validado el funcionamiento de este instrumento, podemos utilizarlo para comparar la duración de acciones no simultáneas sin ningún problema con la subjetividad en la percepción del paso del tiempo. En estos casos, asociaremos una vela a cada acción y encenderemos y apagaremos cada una de ellas cuando empiece y acabe la acción correspondiente, señalando las alturas respectivas con rayas como en el caso anterior. Después solo hay que comparar el trozo que se ha quemado para saber qué acción ha durado más (figura 77), con la seguridad de que hemos eliminado el problema de la percepción personal del paso del tiempo.

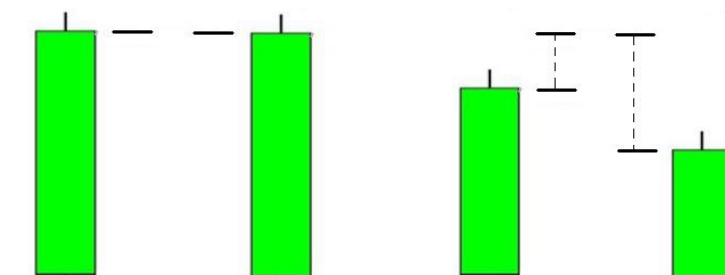


Figura 77. Representación del cálculo experimental del paso del tiempo con velas: situación inicial (izquierda) y final (derecha)

La posibilidad de comparación de la duración del tiempo en acciones distintas, mejora la relación del alumnado con esta magnitud pero todavía no les permite medirlo. En este momento solo saben qué periodo ha durado más o menos, pero no cuánto tiempo más o menos ha durado uno que el otro.

Para poder responder esta última pregunta tendremos que medir el tiempo y para ello necesitaremos los relojes y las unidades convencionales de medida del tiempo, que se iniciarán de manera incipiente en la capacidad siguiente y que se desarrollarán de manera completa en educación primaria.

16. Identificar una hora, un día, una semana

En esta capacidad realizaremos una aproximación a las unidades más cotidianas de medida del tiempo y que dentro del lenguaje común aparecen con mucha frecuencia. En realidad, el alumnado no las ve como unidades sino como nuevos referentes temporales que añadirán a los ya conocidos de las capacidades anteriores, y que les ayudan en el trabajo de situarse en el tiempo y situar en él los diferentes hechos en los que participan y las acciones que realizan.

Por su dificultad reservaremos este trabajo para el último curso de la etapa y empezaremos hablando de la hora. Para introducirla, se pueden usar relojes escolares

con el formato de los relojes analógicos y que dispondrán, por lo tanto, de una manecilla corta (horaria) y otra más larga (minutero). Asociaremos la hora a la duración de algunos periodos de tiempos dentro del aula y tendremos como referencia para observarla, un reloj que esté en funcionamiento y uno escolar de los que no funcionan. Al principio del tiempo que queramos considerar observarán la hora en el reloj que funciona y pondrán la misma hora en el otro (es conveniente trabajar con horas en punto). Cuando el docente sepa que ha pasado la hora se les hará notar verbalizándolo (ya ha pasado una hora desde que estamos en clase, ya ha pasado una hora desde que hemos vuelto del patio...) y revisarán la hora que marca el reloj en funcionamiento, comparando las posiciones de sus manecillas con las del otro reloj. En estos momentos deben observar que la aguja corta ha pasado de un número al siguiente y les haremos ser conscientes de que la larga ha dado una vuelta completa, con la ayuda de un reloj auxiliar en el que podemos desplazar las agujas de manera sincronizada (figura 78).



Figura 78. Reloj de engranajes (fabricado por Kalmarsund)

Entonces asociaremos la hora con el tiempo que tarda la manecilla larga en dar una vuelta completa al reloj o la corta en pasar de un número al siguiente y podemos trabajar con ellos la lectura de algunas horas. Es conveniente informar a los padres y las madres de lo que estamos haciendo en clase respecto de las horas, para que puedan ayudarnos desde casa completando el conocimiento de algunas horas en las que nunca están en la escuela, insistiendo en que solo deben reforzar el trabajo que se hace en clase, sin introducir minutos y segundos, ni relojes digitales.

Respecto del día, este se considerará de manera conjunta como el periodo de tiempo integrado por la mañana, la tarde y la noche, conceptos que ya se han estudiado en capacidades anteriores. Como trabajar el principio y el final del día puede resultar un poco complicado para el alumnado (a las doce de la noche, habitualmente están durmiendo), para hacer significativo el paso de un día a otro, optaremos por la identificación de un día con el periodo de tiempo que transcurre desde que nos levantamos de la cama hasta que nos volvemos a levantar, que es una forma más fácil de tratar esta cuestión con los niños y las niñas. Se trabaja conjuntamente con los conceptos de ayer, hoy, mañana y volverán a ser de gran ayuda las rutinas diarias con el calendario para situarse en uno u otro día y para saber cuándo ha acabado un día y empieza el siguiente.

En cuanto a la semana, como es un periodo de siete días, se relaciona con el estudio realizado sobre los días de colegio y los del fin de semana. Podemos ayudarnos también de las rutinas mencionadas antes y de la elaboración conjunta con el alumnado de calendarios semanales, en los que se recojan los siete días, que se considerarán completos cuando los lunes comentemos con ellos y ellas qué han hecho durante el fin de semana y sean conscientes del paso de estos dos días que no han estado en la escuela. Utilizaremos calendarios como el que se muestra en la figura 79, en el que podemos componer cada semana, además de ofrecerles otras informaciones sobre los referentes temporales sociales. No hace falta que se aprendan ordenadamente los nombres de los días de la semana, solo que sepan cuáles son y que diferencien los laborables de los que no lo son.



Figura 79. Calendario escolar (fabricado por Akros)

Primeras nociones espaciales y geométricas

1. Introducción

En este tema se trabajan las primeras aproximaciones a su contexto espacial, para ofrecer a los niños y a las niñas, las herramientas matemáticas que les ayuden a responder las preguntas que la realidad les plantea respecto a «¿cómo son los objetos?, ¿dónde estás tú y dónde se encuentran estos?, ¿cómo se relacionan espacialmente?».

Empieza con una referencia histórica sobre la geometría, seguida de una reflexión sobre las diferentes geometrías que existen y de una compilación teórica sobre los conceptos correspondientes que necesitará el docente de infantil. Finaliza con un extenso tratamiento didáctico de los contenidos geométricos para su desarrollo en esta etapa educativa.

1.1. Histórica

Del griego *gea*, tierra, y *metron*, medida, la geometría, desde sus orígenes, fue la encargada de resolver problemas de la realidad. Un tipo de problemas se centraba en la medida y reconstrucción de terrenos y campos de cultivo (Segovia y Rico, 2011). Otro se refería a la necesidad de hacer construcciones arquitectónicamente estables, lo que se podía conseguir dotándolas de una cierta estructura geométrica. La búsqueda de solución a estos problemas proporcionaba a la humanidad herramientas matemáticas para controlar el entorno y servirse de este. Los griegos combinaron esta utilidad de la geometría puramente práctica, con otros aspectos de cariz teórico (Argüelles, 1989) y artístico (frisos, mosaicos, cenefas, etc.).

A pesar de que filósofos como Aristóteles (siglo IV a. C.) sostienen que la geometría nació en Egipto, gráficos y dibujos del Neolítico ya muestran interés por las distribuciones espaciales. Concretamente en este país encontramos el *Papiro Rhind*, que se publicó en el 1700 a. C. Contiene una colección de 84 problemas de carácter aplicado, como por ejemplo cálculo de áreas de tierra, capacidad de almacenes, etc. En el problema 50 se indica cómo calcular el área de un círculo con una aproximación muy precisa de π ; en el 51, el área de un triángulo y, en el 52, el área de un trapecio isósceles. En el problema 56 se pide calcular el volumen de una pirámide regular de base cuadrangular, conocidos el lado de la base y la altura. En estos y otros hallazgos egipcios se observan patrones comunes para resolver algunos tipos de problemas, aunque no hay evidencia de ningún documento que sistematice y justifique los procesos empleados.

La civilización mesopotámica y en concreto los babilonios (muy avanzados en matemáticas), disponían de muchos conocimientos geométricos que les permitían resolver problemas prácticos, como por ejemplo cálculos de áreas de diferentes superficies. Del mismo modo que en el caso de los egipcios, tampoco se conoce ningún escrito que generalice los diferentes procedimientos de resolución de estos problemas.

Los matemáticos griegos recogieron el legado de los egipcios y de los mesopotámicos y progresaron hasta elaborar un cuerpo de conocimientos que sistematizaba los anteriores, justificando y demostrando los diferentes procesos y generalizando los conceptos geométricos necesarios para desarrollarlos. Serían sus máximos exponentes Tales de Mileto (siglo VI a. C.) y Pitágoras (siglos VI-V a. C.), con sus conocidos resultados en cuanto al estudio de los triángulos.

Platón (siglo V-IV a. C.), discípulo de Sócrates (siglo V a. C.) y maestro de Aristóteles (siglo IV a. C.), optó por la utilización de la matemática pura en la geometría. Fue el fundador de lo que se conoce como la Escuela Platónica y a ella le debemos:

- La clasificación de los poliedros regulares (poliedros convexos determinados por polígonos regulares iguales y cuyos vértices son uniformes, es decir, en ellos se une la misma cantidad de caras o aristas). La palabra poliedro proviene del griego *polýhedros*; de *polýs*, mucho, y *hédra*, cara. Debido a la importancia que la Escuela Platónica les dio, hoy en día se conocen como sólidos platónicos. Estos son el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, todos ellos regulares. Platón asocia a estos sólidos los elementos fuego, tierra, aire, el material con el cual se formaron las constelaciones y el cielo (Universo), y el agua, respectivamente.
- La determinación de sucesivas aproximaciones al área del círculo mediante el método exhaustivo o por agotamiento que, posteriormente, consolidará Arquímedes.

Euclides recopiló la matemática que se conocía hasta ese momento en los trece libros que componen los *Elementos*, alrededor del año 300 a. C. (Dorce, 2013). Es, posiblemente, la obra matemática más leída (por ser la más editada) a lo largo de la historia. En los volúmenes dedicados a la geometría describió, entre otros contenidos, cómo construir figuras con regla y compás, y enunció que solo hay cinco poliedros regulares.

A finales del siglo XVI, Kepler imaginó una relación entre los cinco poliedros regulares y las órbitas de los planetas del sistema solar entonces conocidos (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno). Según él, cada planeta se movía en una esfera separada de la contigua por un sólido platónico.

Por otro lado, los sólidos arquimedianos, también conocidos como semirregulares (poliedros convexos formados por polígonos regulares de dos o más tipos con vértices uniformes) deben el nombre a Arquímedes que los descubrió y estudió en

el siglo III a. C. A pesar de que su trabajo se perdió, tenemos constancia de este por otro de Pappus de Alejandría. Será Kepler en los siglos XVI y XVII quien demuestre que solo pueden haber trece poliedros con estas características (Dorce, 2013).

La geometría expuesta es solo una parte de la llamada descriptiva, que se ha desarrollado a lo largo de los siglos mencionados. A partir del siglo XVI empieza a introducirse la situación de las figuras en el plano y el espacio mediante coordenadas. Este hecho es muy importante, porque origina una geometría más analítica y empieza a abandonarse la representación gráfica como único apoyo de los cálculos. Todo este conocimiento de la matemática más geométrica se articula a partir de cinco axiomas expuestos por Euclides, que deben considerarse como verdades absolutas. Nunca se habían cuestionado, pero tampoco demostrado. Uno en concreto, el quinto, o axioma del paralelismo, dice que «por un punto exterior en una recta, se puede trazar solo una paralela a ella». Hasta el siglo XIX no se puso en entredicho este postulado y serán Gauss (1777-1855), Bolyai (1775-1856) y Lobachewski (1792-1856), quienes, de manera separada, no solo no lo aseveran, sino que encaminan sus estudios suponiendo su falsedad, y crean, así, la geometría hiperbólica.

Con los trabajos de Riemann (1826-1866) sobre la geometría esférica y la teoría de la relatividad de Einstein (1879-1955), que incluye el tiempo en la concepción geométrica del Universo, se produce la explosión de las geometrías no euclídeas.

La existencia de estas geometrías provocó el interrogante alrededor de qué es, realmente, la geometría. En 1872, el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) respondió a este interrogante con la publicación de su *Programa de Erlangen*, donde clasifica las diferentes geometrías a partir de grupos de transformaciones geométricas (Stewart, 2008; Dorce, 2014).

Actualmente, esta parte de la matemática investiga nuevos conocimientos en los campos de la topología y la geometría algebraica.

1.2. Al tema

Si ponemos la mirada en educación infantil, la geometría adquiere la capacidad de ser la parte de la matemática encargada de vehicular la relación espacial de los niños y las niñas con el mundo que les rodea. Asumiendo que este mundo es tridimensional, habrá que descubrir las infinitas direcciones que hay para moverse en él y de estas las que son posibles en función del contexto en el que se encuentre el individuo que ha de iniciar el movimiento y de los intereses que dictaminen el variarlo.

Como esta parte inicial de la geometría, la de la exploración del espacio, va muy ligada al desarrollo natural de las personas en estas edades, nos podemos encontrar que, a grandes rasgos, la intuición les hará adquirir estas capacidades de manera autónoma. Pero un trabajo de situación, reconocimiento y reproducción de posiciones de objetos en el espacio y el orden que ocupan en función de otros, les ayudará, indudablemente, a la adquisición de nociones geométricas básicas (líneas,

superficies y espacio) que les dotarán de las herramientas adecuadas para trabajar de manera más simbólica en primaria estos conceptos.

El objetivo del tema es, por un lado, dar a conocer los conceptos, elementos relevantes, propiedades y características de las figuras geométricas que se trabajan en la escuela y, de otra, cómo se debe hacer la transposición didáctica de esta parte de la geometría en el aula de educación infantil.

2. Los primeros pasos por la geometría

2.1. Preliminares

La evolución de los primeros conceptos geométricos, basada en el proceso de abstracción que la Humanidad hace de las formas del entorno y de su idealización, ha producido la inmensidad de ramificaciones geométricas que existen en la actualidad. Son muchas las personas que han investigado e investigan en la rama de las matemáticas dedicada a la geometría, y que hacen una gran inversión de horas en líneas de trabajo de tal potencial de abstracción, que ni siquiera podríamos imaginar.

Pero la esencia más primitiva, intuitiva o descriptiva de esta primera geometría, la que se encarga del conocimiento del espacio (considerado como el conjunto de todos los puntos existentes) y de las figuras geométricas, es la que nos interesa para las aulas de infantil y primaria. Y la razón es bien sencilla, hay que dotar al alumnado de herramientas para que sepa orientarse en su entorno (que, además, está en continua transformación) y para que sea capaz de describir y clasificar aquello que le rodea.

Si se asume, como punto de partida, la definición de figura geométrica, como cualquier conjunto de puntos en el espacio, parece lógico pensar que la evolución natural de los conceptos matemáticos tendría que ser estudiar los puntos, después las líneas, más tarde las superficies y, para finalizar, los cuerpos geométricos.

Esta concepción se enfrenta con la percepción que hay en los niños y las niñas de educación infantil y de primaria de su realidad y la aproximación que pueden hacer a esta. Si se atiende a cuestiones de psicomotricidad, de desarrollo cognitivo y de conocimiento general del medio donde viven, la aproximación didáctica tendría que dirigirse primero a los cuerpos geométricos (pueden cogerlos, manipularlos...), después a las figuras geométricas planas que los limitan, como los límites de estas figuras y cuerpos, más adelante a las líneas (lados o aristas) y, para finalizar, como intersecciones de estas líneas, a los puntos. En el ámbito de la matemática formal, hay que hacer el recorrido contrario para poder definir un objeto geométrico de más envergadura a partir del anterior.

En todo el trabajo que se desarrolle en el aula deberemos tener en cuenta la imposibilidad de materializar las figuras geométricas de menos de tres dimensiones.

Las rectas o triángulos que se pueden dibujar u observar en un objeto, solo son representaciones perceptibles de los conceptos matemáticos abstractos. Porque una recta, como concepto, es un ente infinito e ilimitado que no tiene grosor y, por lo tanto, no se puede construir físicamente. Por la segunda razón (la inexistencia de grosor) se llega también a la imposibilidad de poder construir materialmente un triángulo, un círculo y, en general, cualquier figura plana.

2.2. Geometrías

Los cambios que afectan el entorno del alumnado vienen dados por las modificaciones de las figuras geométricas que se encuentran en este. Lo que hace que unas figuras geométricas se transformen en otras, son las transformaciones geométricas. En la realidad, una transformación es una deformación, una proyección, un desplazamiento, etc. Matemáticamente, estas transformaciones las podemos abstraer en aplicaciones biyectivas del espacio en sí mismo que parten de una figura geométrica y la transforman en otra. Pero ¿qué propiedades de la figura original se conservan en la figura transformada u homóloga? De otro modo, ¿cuáles serán las características invariables de la figura geométrica original, por estas transformaciones?

De acuerdo con el *Programa de Erlangen*, publicado por Felix Klein en 1872, el estudio de estas propiedades invariables lo hace la geometría y, como hay varios tipos de transformaciones, podemos hablar de diferentes geometrías.

Si estudiamos más detenidamente las transformaciones que pueden aparecer, tenemos:

1. *Transformaciones topológicas*. Si se puede hablar de una escala de intensidad en las transformaciones a las cuales pueden estar sometidas las figuras geométricas, las que ocupan uno de los lugares más altos en aquella escala serían las transformaciones topológicas, que deforman, estiran o contraen, y provocan grandes cambios en la figura original pero sin producirle roturas, por lo cual se denominan también bicontinuas. Ejemplos de estas transformaciones serían las que se pueden apreciar en la figura 80.

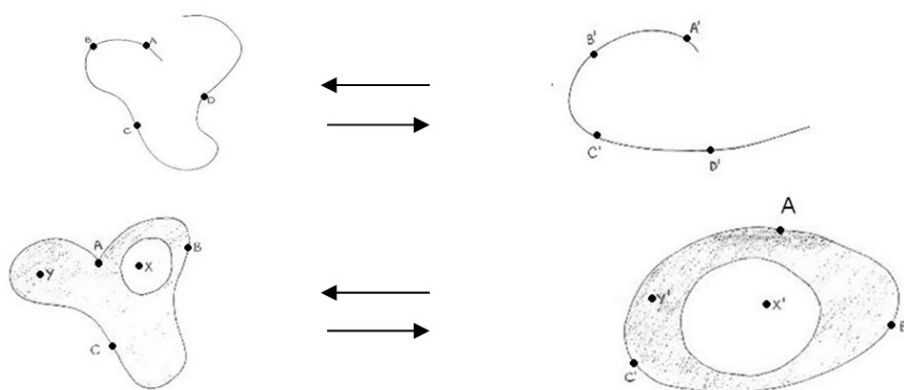


Figura 80. Ejemplos de transformaciones topológicas

Como se puede observar, estas transformaciones no conservan longitudes, ni ángulos, ni medidas de ningún tipo, pero sí hay otras propiedades que se conservan. Por ejemplo, el carácter de abierto o cerrado de una figura; el interior y el exterior de la misma; el orden de sus puntos.

2. *Proyecciones*. Si ahora se compara una figura plana con la sombra que la misma produce sobre un plano (para obtener solo una aproximación intuitiva a estas transformaciones), observaremos que, según donde esté el foco de luz (cerca o en el infinito) y como esté el plano (paralelo o no al que ocupa la figura) donde se proyecta esta sombra, encontraremos diferentes tipos de transformaciones, llamadas *proyecciones* o *transformaciones proyectivas*.

Todas ellas conservan las líneas rectas y curvas y también la convexidad, como se puede ver en la figura 81.

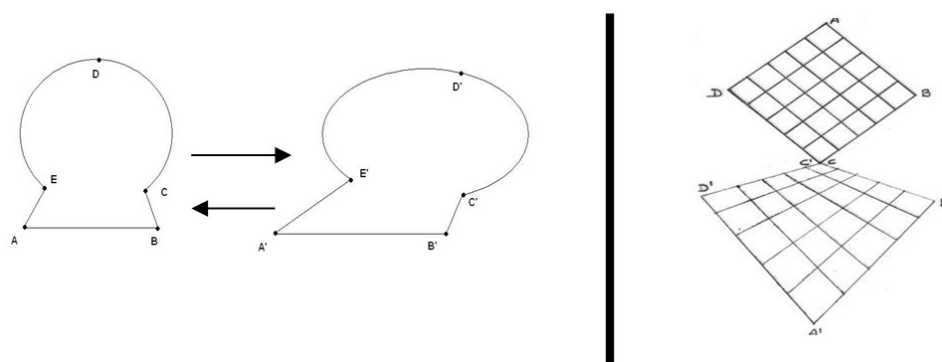


Figura 81. Ejemplos de proyecciones

Algunas proyecciones conservan además el paralelismo y la proporcionalidad y se denominan transformaciones *afines* o *afinidades* (figura 82).

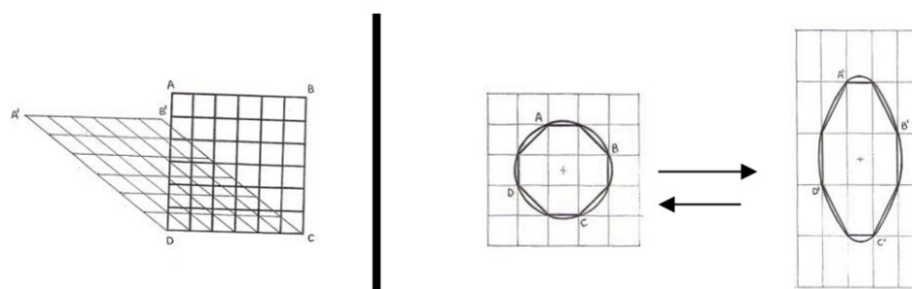


Figura 82. Ejemplos de transformaciones afines

Dentro de las afinidades, existen proyecciones que aumentan o disminuyen la medida de las longitudes, pero no cambian la forma. Son las llamadas *semejanzas* y tenemos un ejemplo en el gráfico de la figura 83.

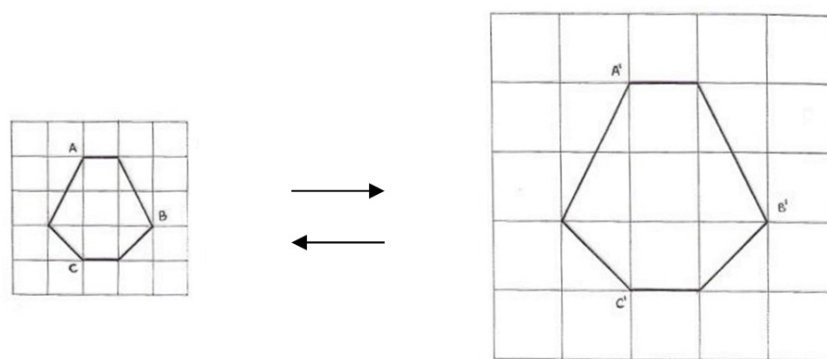


Figura 83. Ejemplos de semejanzas

3. *Movimientos rígidos*. Si comparamos dos figuras geométricas iguales, una junto a la otra, podemos considerar que se ha producido un desplazamiento. Tenemos dos ejemplos en los gráficos de la figura 84.

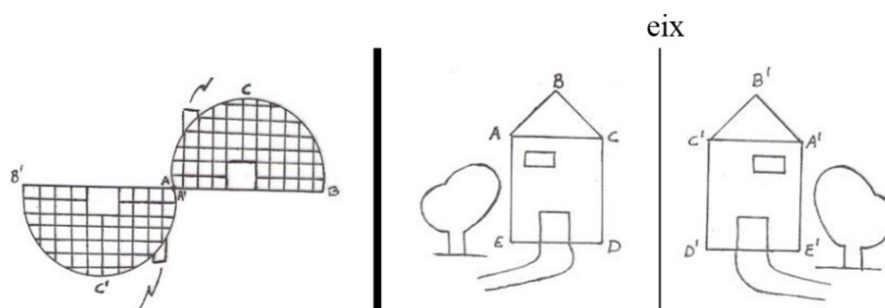


Figura 84. Ejemplos de un giro y una simetría axial en figuras planas

Observamos que todas las dimensiones de una figura y de su transformada son iguales. En cada caso podemos dar una explicación a la obtención de la segunda figura, como el resultado de transformar la primera por un movimiento rígido en el espacio, a consecuencia del cual hay un desplazamiento, pero no un cambio de dimensiones, es por eso que estas transformaciones se denominan también *isometrías*. Dentro de los movimientos rígidos podemos encontrar tres tipos de transformaciones diferentes: traslaciones, giros y simetrías axiales (los gráficos anteriores corresponden a las dos últimas).

Si agrupamos las diferentes propiedades de las figuras que se conservan al aplicarles las transformaciones, se generan los siguientes campos de estudio en la geometría:

Topología

Es la parte de la geometría que estudia las propiedades de las figuras que se conservan cuando se les aplica una transformación topológica, es decir, el orden de los puntos, el interior y el exterior de las figuras, si son cerradas o abiertas y la

frontera. Entonces, desde el punto de vista topológico, un círculo es equivalente u homólogo a un cuadrado, un triángulo o un pentágono..., por ejemplo. En tres dimensiones, una esfera sería topológicamente homóloga a un tetraedro o a un cubo.

Geometría de las proyecciones o proyectiva

Se puede definir como la geometría que se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas que se mantienen invariantes cuando se les aplica una proyección, es decir, una transformación proyectiva, una transformación afín o una semejanza:

- Cuando se aplica una transformación proyectiva a una figura geométrica, las propiedades específicas que se mantienen invariantes son el carácter de línea recta o curva y la convexidad de las figuras.
- Cuando se aplica una transformación afín a una figura geométrica, las propiedades específicas que se mantienen invariantes son el paralelismo, el punto medio y la proporcionalidad entre segmentos.
- Cuando la transformación que se aplica a una figura geométrica es una semejanza, las propiedades específicas que se conservan son los ángulos y, por tanto, la forma de la figura.

El estudio de las propiedades invariantes antes mencionadas se puede considerar de manera global dentro de la llamada geometría de las proyecciones o, de manera individual, dando origen a tres campos geométricos denominados geometría proyectiva, geometría afín y geometría de la semejanza, respectivamente.

Geometría euclídea

Esta rama de la geometría, también llamada métrica, se encarga de estudiar las propiedades de las figuras geométricas que se mantienen invariantes cuando se les aplica un movimiento rígido (giro, traslación o simetría axial). Las figuras homólogas mantienen invariantes las propiedades de medida de longitudes y, como consecuencia, de superficies y volúmenes.

2.3. Referentes psicoevolutivos

Una vez se han presentado, a grandes rasgos, las matizaciones de las diferentes geometrías, habrá que recurrir a ellas cada vez que se presente una conexión con el trabajo que se hará en las aulas escolares y que, en el caso de educación infantil, se desarrolla en el punto 4 de este tema.

Tampoco podemos olvidar el momento evolutivo del alumnado que tendremos delante y cómo este afecta a la adquisición de los conceptos geométricos. Jean Piaget (1896-1980), con sus cuatro estadios del desarrollo cognitivo de cero a

quince años, establece una conexión de la geometría con la concepción espacial de los niños y las niñas.

En la escuela empezaremos estudiando los conceptos de la topología para construir el espacio topológico, pasando después a los de las geometrías proyectiva y métrica con el fin de construir los espacios proyectivo y euclídeo, respectivamente.

Antes de desarrollar los contenidos y las capacidades geométricas en el aula de infantil, se hace necesario fundamentar matemáticamente los conceptos correspondientes. Para dar respuesta a esta necesidad se presenta a continuación una introducción teórica de todo aquello que el docente de esta etapa puede requerir para llevar a cabo su tarea.

3. Introducción teórica

3.1. Líneas en el plano

Cualquier línea abierta que se pueda trazar es una representación de una transformada de una recta o de algunos de los subconjuntos de esta. Del mismo modo, cualquier línea cerrada será una representación de una transformada de una circunferencia.

La expresión analítica de una recta o una circunferencia (con coordenadas, dentro de un sistema de referencia) surge de la necesidad de controlar, cuando menos, estas manifestaciones de la realidad en las que, de manera natural, aparecen.

Será, pues, útil conocer mínimamente estas consideraciones de carácter más formal, para después conectarlas con lo que se ha de explicar en el aula de primaria.

3.1.1. Antecedentes: plano, puntos y vectores

Se considera el plano como la porción del espacio determinada por dos rectas diferentes paralelas o secantes, donde situaremos dos ejes de coordenadas perpendiculares (eje X y eje Y, o de abscisas y de ordenadas, respectivamente), y en el que podemos representar todas las figuras geométricas planas, entre otras: punto, vector, recta, circunferencia..., que son las que estudiaremos. Tiene dimensión dos, precisamente por ser dos los ejes necesarios para determinarlo, y se nombran habitualmente con letras griegas (π , α , β ...). En el plano encontramos un punto importante en el que se cortan los dos ejes, que se denomina origen de coordenadas y que se hace corresponder con la posición del 0 en ellos. A partir de este punto y a intervalos de la misma longitud se sitúan hacia la derecha y hacia arriba los números enteros positivos y en los otros sentidos los negativos.

Cualquier punto que se quiera situar en el plano debe contener información ordenada respecto de estos dos ejes, primero del X y después del Y (figura 85).

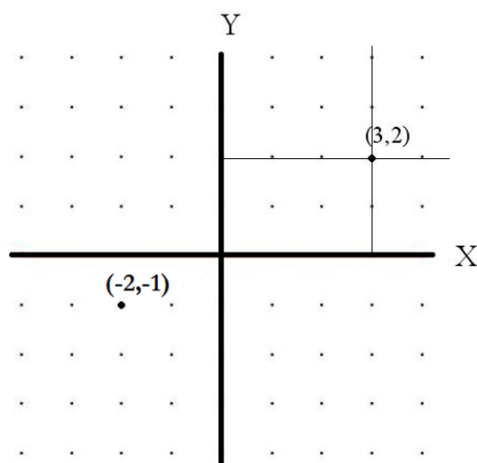


Figura 85. Representación de los ejes de coordenadas con la situación de dos puntos

El punto es la mínima figura geométrica. Analíticamente se representa por un par de números separados por una coma y dentro de un paréntesis, que son las coordenadas del punto. Por ejemplo, el origen de coordenadas se representaría por $(0,0)$. El primer número indica el valor correspondiente al eje X, y el segundo, al eje Y. La representación gráfica de este par de números, es una marca pequeña, que se situará en la intersección de dos rectas imaginarias perpendiculares entre sí, y paralelas cada una de ellas a uno de los ejes, que cortarán al otro por los valores que aparecen en el par de coordenadas (por ejemplo, el $(3,2)$). El punto no tiene tamaño, ni forma y, por lo tanto, no se puede deformar por ninguna transformación geométrica, sí se puede desplazar, pero solo esto. Usualmente se nombra con una letra mayúscula.

Un vector fijo en el plano, \overrightarrow{AB} , es un segmento orientado que tiene el origen en el punto A y el extremo en el punto B . Si ponemos coordenadas a los puntos, $A = (a, a')$ y $B = (b, b')$, las del vector serán, $\overrightarrow{AB} = (b - a, b' - a')$.

- **Elementos de un vector:**

- *Dirección:* Se define como la recta sobre la que se encuentra el vector. Todas las rectas paralelas a esta tienen la misma dirección.
- *Sentido:* Es el del recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B . Es evidente que cada dirección admite dos sentidos, el de A a B y el de B a A . Por lo tanto, la manera de determinarlos será diferente, así $\overrightarrow{AB} = (b - a, b' - a')$ y análogamente $\overrightarrow{BA} = (a - b, a' - b')$.
- *Módulo:* Es la distancia entre A y B , es decir, la longitud del segmento \overline{AB} . Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$ y se calcula a partir del teorema de Pitágoras según: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b - a)^2 + (b' - a')^2}$. Diremos que un vector es unitario si su módulo es 1.

3.1.2. La recta

Una recta en el plano queda determinada vectorialmente por un punto (a,b) y un vector (v,w) que marcará la dirección de la recta y que se denomina vector director, y usualmente se denominará con una letra minúscula (r, s, t, \dots). La misma recta también quedará determinada si cogemos como vector director el de sentido contrario al inicial, $(-v,-w)$. De este modo se observa que en la dirección que determina una recta encontramos dos sentidos opuestos, como se ha comentado con anterioridad (figura 86).

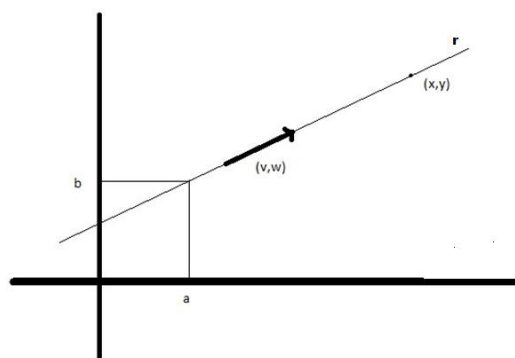


Figura 86. Representación vectorial de una recta

Cualquier punto (x,y) de la recta, se obtendrá trasladando el punto fijo (a,b) , según un vector múltiplo de (v,w) .

Así:

$$(x,y) = (a,b) + k \cdot (v,w), \quad k \in \mathbb{R}.$$

La expresión anterior se denomina ecuación vectorial de la recta, y forma parte del listado completo de «ecuaciones de la recta», en el que no vamos a entrar en este apartado.

Cualquier punto de una recta la divide en dos semirrectas que tienen este punto como origen y que se denominan opuestas.

Todas las semirrectas que tienen origen en un punto dado de un plano (haz de semirrectas) recubren este y permiten orientarlo en dos sentidos diferentes. Si a partir de una semirrecta concreta recorremos el haz siguiendo el sentido de las agujas del reloj, se habrá orientado el plano en un sentido llamado negativo. En caso contrario el sentido será positivo.

Cualquier par de puntos de una recta, A y B , determina un segmento \overline{AB} formado por todos los puntos de la recta que se encuentran situados entre A y B , y por estos dos puntos (extremos del segmento) si es cerrado. Si el segmento no incluye ninguno de los extremos es abierto y si no incluye uno de estos es semiabierto. En general, cuando se hable de segmentos nos referiremos a segmentos cerrados.

La longitud de un segmento \overline{AB} se calcula midiendo la distancia entre sus extremos y se representa por $|\overline{AB}| = d(A, B)$, tal como se ha especificado en el caso de los vectores en el punto 3.1.1.

La recta perpendicular a un segmento por el punto medio del mismo se denomina mediatriz.

Dos segmentos cualesquiera pueden tener o no puntos en común. Diremos que dos segmentos son concatenados cuando tienen un extremo común y son consecutivos cuando tienen un extremo común y están alineados.

Si consideramos dos líneas rectas en el plano, las posiciones relativas que pueden tener son:

1. *Rectas secantes*: tienen solo un punto en común. Analíticamente $r \cap s = \{P\}$ (figura 87).

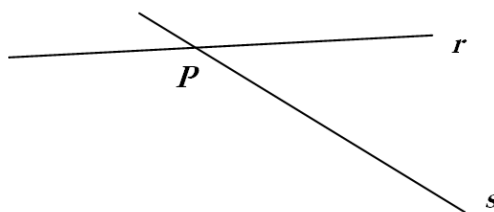


Figura 87. Representación de rectas secantes en el plano

2. *Rectas paralelas no coincidentes*: no tienen ningún punto en común. Analíticamente $r \cap s = \emptyset$ (figura 88).

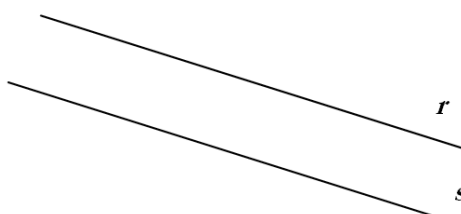


Figura 88. Representación de rectas paralelas no coincidentes

3. *Rectas paralelas coincidentes*: tienen todos los puntos comunes. Analíticamente $r \cap s = r = s$ (figura 89).

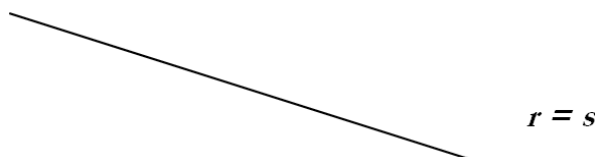


Figura 89. Representación de rectas paralelas coincidentes

Nota: Si consideramos dos líneas rectas en el espacio, habría que añadir un nuevo caso a estos tres: *Rectas que se cruzan en el espacio*, tampoco tienen puntos en común y no pertenecen al mismo plano. Analíticamente $r \cap s = \emptyset$ (figura 90).

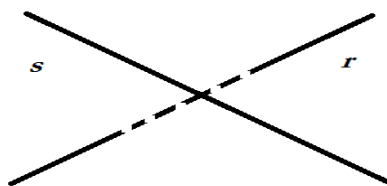


Figura 90. Representación de rectas que se cruzan en el espacio

3.1.3. La circunferencia

Definimos circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de uno fijo llamado centro. Esta distancia fija se denomina radio. Con la palabra radio, nos referimos también a cada uno de los segmentos que unen el centro con un punto cualquiera de la circunferencia (figura 91).

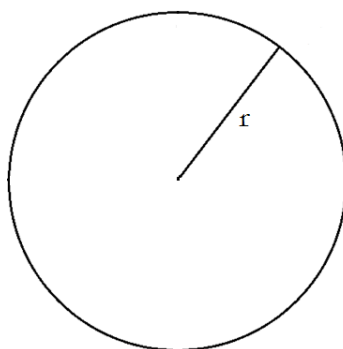


Figura 91. Representación de una circunferencia y de uno de sus radios

Definimos a continuación algunos de sus elementos básicos:

- Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- Arco: tramo o porción de la circunferencia comprendido entre dos puntos de esta. Cuando los puntos son los extremos de un diámetro, el arco es una semicircunferencia.

Cuando haya que calcular la longitud de una circunferencia de radio r , utilizaremos la expresión $L = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Si se considera una circunferencia y una recta, las posiciones relativas que pueden tener en el plano son las siguientes (figura 92):

- a) Recta tangente: La recta y la circunferencia solo tienen un punto en común.
- b) Recta secante: La recta y la circunferencia tienen dos puntos en común.
- c) Recta exterior: La recta y la circunferencia no tienen puntos en común.

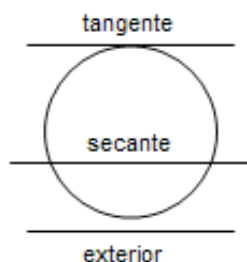


Figura 92. Representación de las posiciones relativas de una circunferencia y una recta en el plano

De todos los tipos de líneas que podemos encontrar en el plano, nos interesan particularmente las abiertas y las cerradas simples (aquellas que no tienen ningún punto por donde la línea pasa dos veces). En el caso de las abiertas, su principio y su final son dos puntos diferenciados, mientras que en las cerradas, son el mismo punto. En general, obtendremos líneas abiertas simples al aplicar una transformación topológica a una recta, una semirrecta o un segmento y líneas cerradas simples al aplicarla a una circunferencia.

3.2. Superficies en el plano

Una superficie plana es una figura geométrica que resulta de considerar una parte del plano determinada por líneas de este. En particular, cualquier recta de un plano lo divide en dos regiones llamadas semiplanos que incluyen la recta.

Una superficie plana es convexa (figura 93) cuando contiene todos los segmentos que unen cualquier par de puntos de ella. Y cóncava (figura 94) cuando alguno de estos segmentos no esté contenido en la superficie.

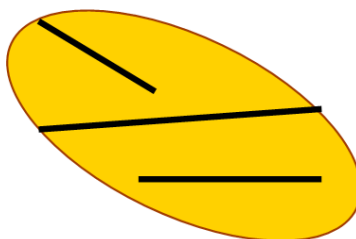


Figura 93. Representación de una superficie plana convexa

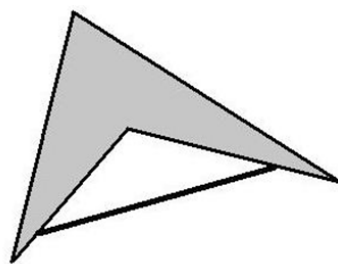


Figura 94. Representación de una superficie plana cóncava

3.2.1. Ángulos

Las primeras superficies planas que se deben estudiar son las llamadas ángulos.

Cuando dos rectas son secantes, definen cuatro regiones en el plano. Se denomina ángulo a cada una de estas regiones, incluyendo las semirrectas de origen común que las definen. A este origen se le llama vértice del ángulo y a las semirrectas, lados del mismo (figura 95).

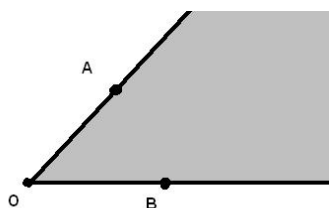


Figura 95. Representación de una región angular

Simbolizamos el ángulo de dos maneras diferentes: mediante solo el vértice, \hat{O} , o bien con una terna de puntos compuesta por un punto de cada lado del ángulo y su vértice entre ellos, \hat{AOB} .

Cuando las cuatro regiones son iguales, los ángulos se denominan rectos, y su amplitud angular es de 90° . Cuando las semirrectas que determinan el ángulo son opuestas, este se llama ángulo llano. Su amplitud es igual a dos ángulos rectos, es decir 180° .

Los ángulos que tienen una amplitud menor que el recto se denominan agudos.

Los ángulos cuya amplitud está comprendida entre un ángulo recto y un ángulo llano, se llaman obtusos.

Cuando las dos semirrectas que determinan el ángulo son coincidentes, el ángulo que se forma se denomina completo. Su amplitud es igual a cuatro ángulos rectos, es decir 360° .

Estos cinco tipos de ángulos son convexos. Serán cóncavos el resto de ángulos, es decir, los que miden más de 180° y menos de 360° .

Dos ángulos serán complementarios cuando la suma de sus amplitudes sea igual a 90° ; serán suplementarios cuando sumen 180° y conjugados cuando sumen 360° .

En cualquier ángulo, se denomina bisectriz de este a la semirrecta contenida en él que tiene el origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

3.2.2. Polígonos

Definimos línea poligonal como una colección de segmentos concatenados no consecutivos.

Una línea poligonal será simple (figura 96) si no hay ningún punto diferente de los extremos de los segmentos que pertenezca a dos de ellos a la vez. En caso contrario, se llama no simple (figura 97).

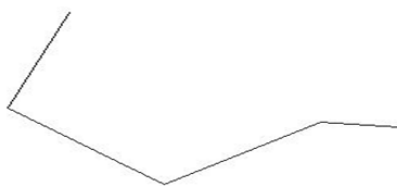


Figura 96. Representación de una línea poligonal simple

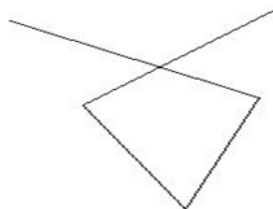


Figura 97. Representación de una línea poligonal no simple

Si en una línea poligonal de más de dos segmentos el primero y último tienen un extremo común, esta será cerrada. En caso contrario será abierta.

A partir de estos conceptos, definimos polígono como la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada simple, incluyendo esta línea.

Cada segmento de la línea poligonal se llama lado del polígono y si sumamos las longitudes de todos los lados de un polígono, obtenemos su perímetro. Los extremos de los lados son los vértices del polígono. El segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono es una diagonal del mismo.

Nombraremos los lados de un polígono con letras minúsculas: a, b, c...; y los vértices con letras mayúsculas: A, B, C... En el caso de los triángulos, se acostumbra a utilizar la misma letra para un lado y para el vértice opuesto.

Las semirrectas que contienen dos lados concurrentes de un polígono y que tienen el origen en el vértice común a estos lados determinan dos ángulos (figura 98). El ángulo que contiene el polígono se denomina ángulo interior del polígono. Usualmente se llama ángulos del polígono a los ángulos interiores del mismo.

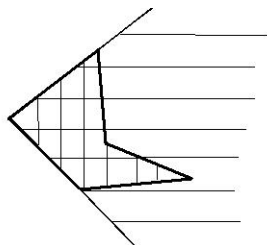


Figura 98. Representación de un ángulo interior de un polígono

Un polígono es equilátero cuando tiene todos los lados de la misma longitud. Se llama equiángulo cuando los ángulos interiores tienen la misma amplitud y es regular cuando es equilátero y equiángulo. Los polígonos regulares tienen en el interior un punto equidistante de todos los vértices que se denomina centro del polígono.

Los polígonos se nombran según el número de lados o de ángulos que tienen. Así encontramos: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos, octágonos, eneágonos o nonágonos, decágonos...

A continuación, estudiamos más en detalle algunos polígonos, por la relevancia que tienen en las aulas de infantil y primaria, dada la gran cantidad de aproximaciones a los mismos que encontramos en los objetos reales del entorno.

3.2.2.1. Triángulos

Un triángulo es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de tres segmentos. Tendrá, por lo tanto, tres lados, tres ángulos y tres vértices.

Podemos nombrar los triángulos en función de sus ángulos y de sus lados.

Si atendemos a los **ángulos**, la denominación produce la siguiente clasificación:

A. *Triángulos acutángulos*, son los que tienen los tres ángulos agudos (figura 99).

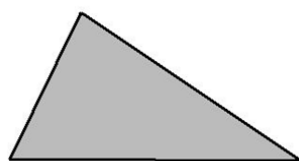


Figura 99. Representación de un triángulo acutángulo

B. *Triángulos rectángulos*, son los que tienen un ángulo recto (figura 100). Los lados que determinan el ángulo recto se llaman catetos y el tercer lado, hipotenusa.

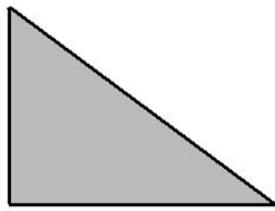


Figura 100. Representación de un triángulo rectángulo

C. *Triángulos obtusángulos*, uno de los tres ángulos es obtuso (figura 101).

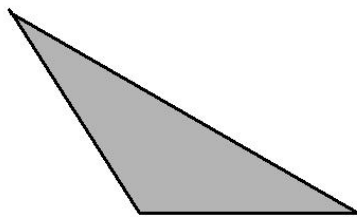


Figura 101. Representación de un triángulo obtusángulo

Si atendemos a los **lados**, las denominaciones son:

A. *Triángulos equiláteros*, son aquellos que tienen los tres lados de igual longitud (figura 102).

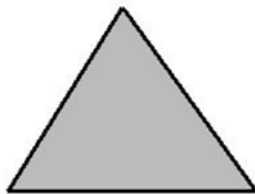


Figura 102. Representación de un triángulo equilátero

B. *Triángulos isósceles*, tienen dos lados de igual longitud (figura 103).

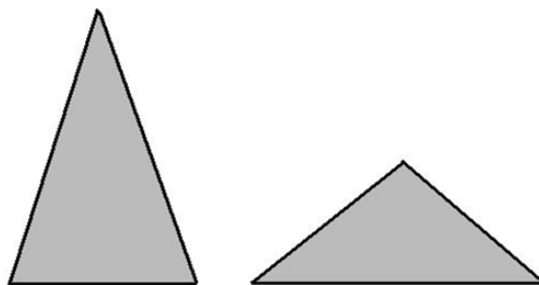


Figura 103. Representación de dos triángulos isósceles

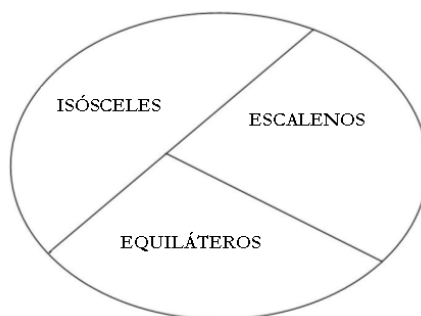
C. *Triángulos escalenos*, los tres lados tienen diferente longitud (figura 104).



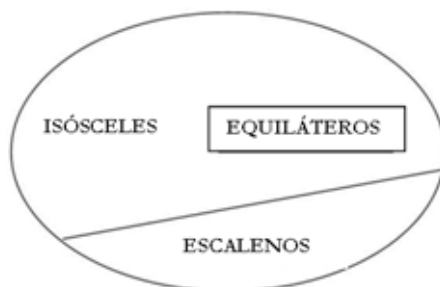
Figura 104. Representación de un triángulo escaleno

Si nos fijamos en los lados de los triángulos podemos obtener dos clasificaciones diferentes. Una sería excluyente y otra inclusiva. La clasificación excluyente es aquella que presenta tantas clases de equivalencia (véase 2.4 del tema 1) como denominaciones diferentes hay. La inclusiva permite que en una misma clase pueda haber elementos correspondientes a más de una denominación. La diferencia se encuentra en la manera de definir los elementos.

Por ejemplo: si se dice que «los triángulos isósceles son aquellos que *solo* tienen dos lados iguales», un triángulo equilátero no es isósceles. Por lo tanto, lo hemos excluido. Es decir, conseguimos una clasificación excluyente de los triángulos que se puede representar de la siguiente manera:



Pero si la definición considerada es «los triángulos isósceles son aquellos que tienen al menos dos lados iguales», un triángulo equilátero sí que es isósceles. Por eso, este tipo de clasificación se denomina inclusiva, porque incluye. En este caso, obtenemos dos clases de equivalencia, la de los triángulos que tienen algunos lados iguales y la de los que los tienen todos diferentes, es decir, la de los isósceles, que contiene los equiláteros como subconjunto, y la de los escalenos, respectivamente:



3.2.2.2. Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de cuatro segmentos. Tendrá, por lo tanto, cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos.

Hay diferentes tipos de cuadriláteros. Según las características que consideremos para cada uno de ellos, obtendremos diferentes clasificaciones.

Así, si atendemos al paralelismo de los lados encontramos tres grandes clases de cuadriláteros: paralelogramos (tienen los dos pares de lados opuestos paralelos), trapecios (tienen solo un par de lados opuestos paralelos, que se denominan bases) y trapezoides (no tienen ningún lado paralelo a otro).

Los cuadriláteros que componen cada una de estas clases se pueden determinar por las siguientes definiciones:

A. Paralelogramos. En función de la igualdad de los lados y/o de los ángulos, obtenemos las cuatro subclases siguientes:

A.1. Cuadrados (figura 105).

- Los cuatro ángulos son de igual amplitud (equiángulo). Y, además, son de 90° .
- Los cuatro lados son de igual longitud (equilátero).



Figura 105. Representación de un cuadrado

A.2. Rectángulos (figura 106).

- Los cuatro ángulos son de igual amplitud (equiángulo). Y, además, son de 90° .
- Los lados opuestos son de igual longitud. Los concurrentes no lo son.



Figura 106. Representación de un rectángulo

A.3. Rombos (figura 107).

- Los ángulos opuestos son de la misma amplitud. Los no opuestos no lo son.
- Los cuatro lados son de igual longitud (equilátero).



Figura 107. Representación de un rombo

A.4. Romboídes (figura 108).

- Los ángulos opuestos son de la misma amplitud. Los no opuestos no lo son.
- Los lados opuestos son de igual longitud. Los concurrentes no lo son.



Figura 108. Representación de un romboide

B. Trapecios. En función de la igualdad de los lados y/o de los ángulos, obtenemos las dos subclases siguientes:

B.1. Trapecios isósceles (figura 109).

- Las longitudes de los lados no paralelos son iguales.
- Los ángulos que comparten un mismo lado básico son iguales dos a dos.



Figura 109. Representación de un trapecio isósceles

B.2. Trapecios escalenos (figura 110).

- Las longitudes de los lados no paralelos son diferentes.



Figura 110. Representación de un trapecio escaleno

Cuando en un trapecio escaleno uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases, se denomina trapecio rectángulo (figura 111).

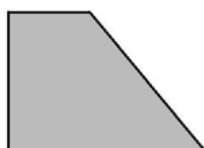


Figura 111. Representación de un trapecio rectángulo

C. Trapezoides. No tienen ningún lado paralelo a ningún otro y no se exige igualdad de lados ni de ángulos (figura 112).

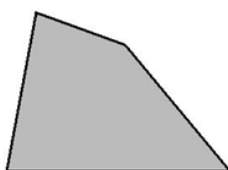


Figura 112. Representación de un trapezoide

Con estas definiciones se consigue una clasificación excluyente de los cuadriláteros, que se puede representar de la siguiente manera:

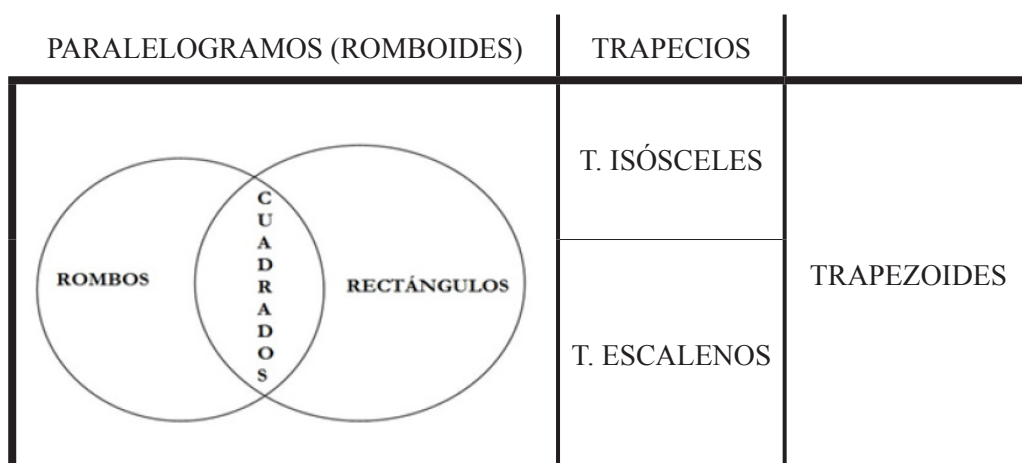
PARALELOGRAMOS	TRAPECIOS	
CUADRADOS	T. ISÓSCELES	TRAPEZOIDES
RECTÁNGULOS		
ROMBOS	T. ESCALENOS	
ROMBOIDES		

Si se quiere obtener una clasificación inclusiva de los paralelogramos debemos incorporar algunos cambios en las definiciones anteriores. Para facilitar la comprensión de la nueva clasificación, nos inclinamos por mantener las tres grandes clases de la clasificación inicial de los cuadriláteros, modificar las definiciones de los paralelogramos y dejar sin cambios las de los trapecios y trapezoides.

Así consideraremos:

- Romboide como el cuadrilátero que tiene los lados opuestos de igual longitud.
- Rombo como el que tiene los cuatro lados de igual longitud.
- Rectángulo como el que tiene los cuatro ángulos rectos.
- Cuadrado como el que tiene los cuatro lados de igual longitud y los cuatro ángulos rectos.

Según las definiciones expuestas, la idea general de paralelogramo se identifica con el concepto de romboide. Además, los cuadrados están incluidos en las clases de rectángulos y de rombos. Entonces la representación gráfica de esta clasificación inclusiva será:



3.2.2.3. Pentágonos

Un pentágono es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de cinco segmentos. Tendrá, por lo tanto, cinco lados, cinco ángulos y cinco vértices. Podemos considerar pentágonos regulares e irregulares. Aunque habitualmente se asocia la idea de este polígono a un pentágono regular, debemos tener en cuenta que existen también otros pentágonos que no lo son, tanto convexos como cóncavos (figura 113).

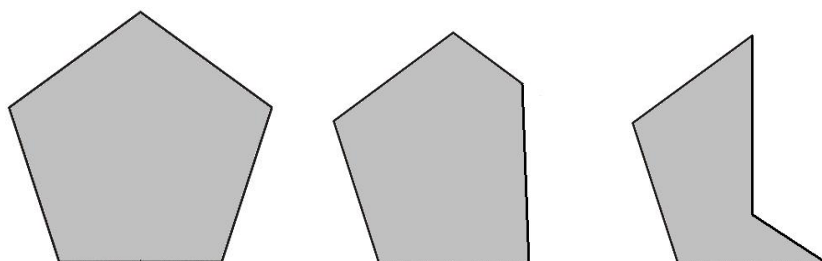


Figura 113. Representación de pentágonos: regular convexo (izquierda), irregular convexo (centro) e irregular cóncavo (derecha)

El pentágono regular ha sido muy utilizado a lo largo de la historia en los ámbitos de la construcción, la religión, las creencias y el arte.

Las rectas que contienen los lados del pentágono regular se cortan en puntos exteriores a este, determinando una figura que se denomina pentáculo (figura 114) y que corresponde al tipo de polígonos conocidos como estrellados. Si unimos los puntos de corte mencionados encontramos un nuevo pentágono.



Figura 114. Representación de un pentáculo

En el arte, el pentáculo también se ha utilizado durante toda la historia. Uno de los casos más significativos, es el cuadro de Dalí, *Leda atómica* de 1949, donde la armonía de las formas se consigue por la inscripción de todas las figuras en un pentáculo regular, como se muestra en la figura 115.



Figura 115. Representación del esbozo y del cuadro *Leda atómica* de Dalí, 1949

3.2.2.4. Hexágonos

Un hexágono es un polígono determinado por una línea poligonal simple cerrada de seis segmentos. Tendrá, por lo tanto, seis lados, seis ángulos y seis vértices. Podemos considerar hexágonos regulares e irregulares. Aunque habitualmente se asocia la idea de este polígono a un hexágono regular, hemos de tener en cuenta que existen también otros hexágonos que no lo son, tanto convexos como cóncavos (figura 116).

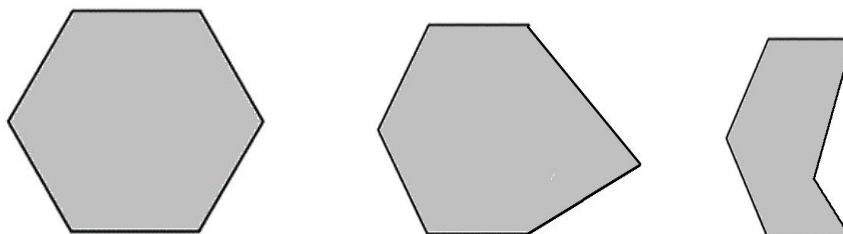


Figura 116. Representación de hexágonos: regular convexo (izquierda), irregular convexo (centro) e irregular cóncavo (derecha)

Una característica que se repite en todos los polígonos regulares es que se pueden dividir en triángulos isósceles iguales uniendo el centro con todos los vértices del polígono. Particularmente, en el hexágono regular, estos triángulos son equiláteros (figura 117).

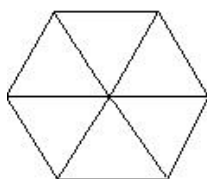


Figura 117. Representación de un hexágono regular dividido en triángulos equiláteros

El hexágono es un polígono con mucha presencia en la naturaleza. La imagen más común es la red de celdas de sección hexagonal que forman las abejas en las colmenas o las facetas de los ojos de algunos insectos (figura 118).

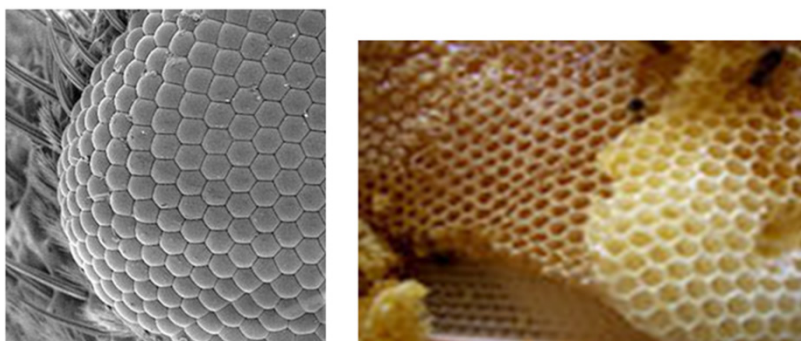


Figura 118. Representación de formas hexagonales en la naturaleza: facetas del ojo de un insecto (izquierda), colmenas de abejas (derecha)

En el ámbito de la química, el hexágono aparece también en muchas de las formas en las que el carbono se presenta en la naturaleza, en particular la conocida como carbono 60, que presenta una estructura tridimensional parecida a la de un balón de fútbol, como la que muestra en la figura 119.

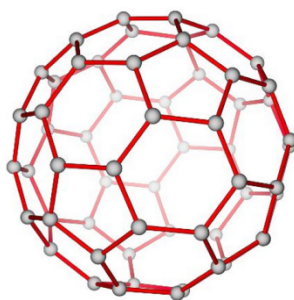


Figura 119. Representación de la estructura tridimensional del carbono 60 (imagen proporcionada por www.pdm.com.co)

Una vez estudiados los ejemplos de polígonos con un número par e impar de lados se hace innecesario detenerse en el estudio detallado de polígonos con más lados, dado que los conceptos vistos hasta ahora se repiten de manera parecida.

3.2.3. Consideraciones sobre los polígonos

3.2.3.1. Mosaicos

Los mosaicos son imágenes compuestas por piezas, que tradicionalmente han sido utilizados en el arte. Se sitúa su origen en construcciones de civilizaciones antiguas (Grecia, Roma, figura 120) y posteriormente se han encontrado también en otras culturas llegando hasta nuestros días.



Figura 120. Imagen de un mosaico romano en Carranque: *La Casa de Materno* (proporcionada por flickr.com)

Están compuestos por piezas de cerámica o vidrio, cuyo objetivo es formar una figura plana sin dejar ningún fragmento de superficie por cubrir. Cada una de estas piezas se llama tesela.

Matemáticamente, se han estudiado los posibles recubrimientos del plano cuando las teselas son polígonos regulares. Las conclusiones de este estudio son:

1. Si utilizamos polígonos regulares de un solo tipo, las redes que se pueden obtener son las que se muestran en la figura 121.

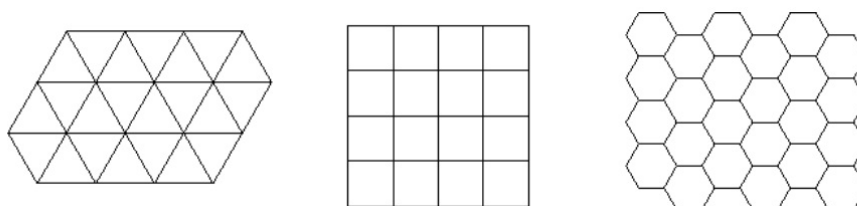
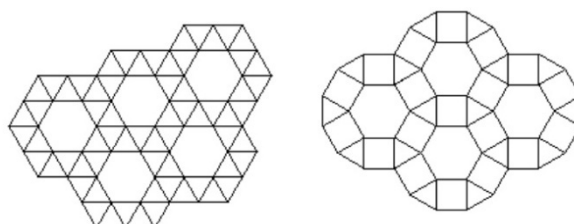


Figura 121. Redes de teselas de un solo polígono: triángulo equilátero (izquierda), cuadrado (centro) y hexágono regular (derecha)

Hemos de resaltar que solo se encuentran estas tres redes porque para recubrir el plano es necesario que en un punto dado los ángulos de los polígonos que concurren sumen 360° y esto solo pasa con estos tres polígonos regulares.

2. Si se utiliza más de un tipo de polígono regular, solo se cumple la condición anterior en los casos de las combinaciones de la figura 122.



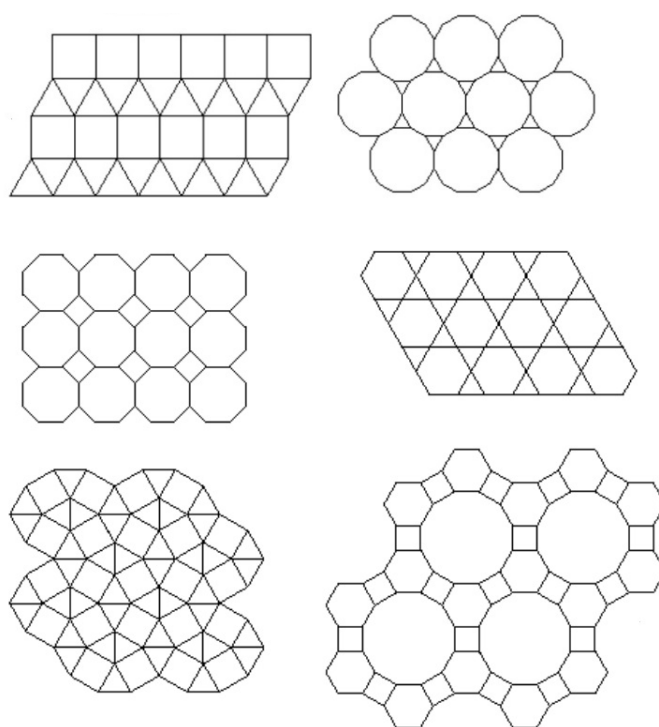


Figura 122. Redes de teselas con formas de diferentes polígonos regulares

3.2.3.2. Polígonos regulares: simetrías

Una figura será simétrica cuando, a partir de un eje de simetría, se desarrolle de igual manera a cada lado de este. El eje de simetría es una recta que no existe en la realidad, pero que la podemos imaginar. Los polígonos regulares, por ser equiláteros y equiángulos, tienen igual número de ejes de simetría que de lados. Las dos figuras siguientes nos servirán para ilustrar los casos generales:

1. Cuando el número de lados es impar, los ejes de simetría son las bisectrices de los ángulos internos, que pasan por el punto medio de los lados opuestos al vértice de cada ángulo. Como hay tantos ángulos como lados, el número de ejes de simetría coincide con el de lados. Un ejemplo para el caso de un triángulo equilátero lo encontramos en la figura 123.

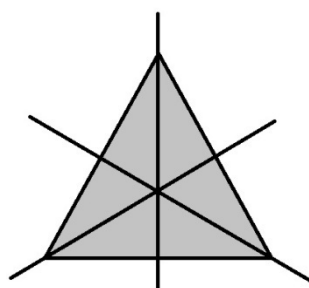


Figura 123. Representación de los ejes de simetría de un triángulo equilátero

2. Cuando el número de lados es par, hay dos tipos de ejes de simetría. Las bisectrices de los ángulos internos, que en este caso coinciden para cada par de ángulos opuestos, y las rectas que pasan por los puntos medios de cada par de lados opuestos. Por esta razón, el número de ejes de simetría que son bisectrices, será la mitad del número de ángulos del polígono y el número de ejes de simetría que pasan por el centro de los lados opuestos, será la mitad del número de lados. Si sumamos estas dos cantidades, obtendremos el número total de ejes, que coincidirá de nuevo con el número de lados. Un ejemplo para el caso de un cuadrado lo encontramos en la figura 124.

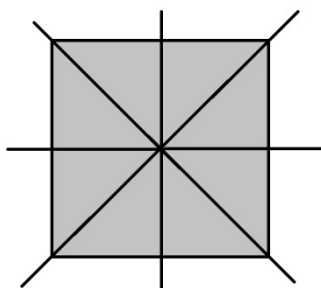


Figura 124. Representación de los ejes de simetría de un cuadrado

Cuando el polígono no es regular, no se puede garantizar el número de ejes de simetría, pero esto no niega que los pueda tener.

3.2.4. Círculo

Definimos círculo como la porción del plano limitado por una circunferencia, incluyendo también esta línea. También se podría definir como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto llamado centro, C , es menor o igual que un valor r , llamado radio.

Para calcular el área de un círculo, utilizaremos la expresión $A = \pi \cdot r^2$.

Teniendo en cuenta las definiciones de los elementos básicos de la circunferencia incluidas en el punto 3.1.3, podemos definir algunas superficies notables relacionadas con el círculo:

- *Ángulo central*: es el que determinan dos semirrectas que contienen dos radios y tiene el vértice en el centro del círculo (figura 125). Como se puede observar, hay dos ángulos centrales representados en la figura: el que se encuentra sombreado, que es convexo y su conjugado, en blanco, que es cóncavo.

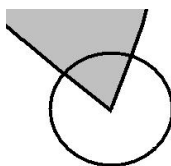


Figura 125. Representación de dos ángulos centrales

- *Sector circular*: es la intersección de un círculo con cualquier ángulo central del mismo (figura 126). Cuando el ángulo central es un ángulo llano, el sector circular es un semicírculo.

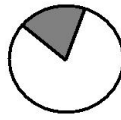


Figura 126. Representación de dos sectores circulares

- *Segmento circular*: es la porción de círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente (figura 127). Cualquier cuerda determina dos segmentos circulares, ya que sus extremos delimitan dos arcos en la circunferencia. Cuando la cuerda es un diámetro, el segmento circular se denomina semicírculo, que también se puede definir como la porción de círculo comprendida entre una semicircunferencia y el diámetro que la define.

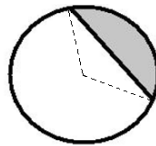


Figura 127. Representación de los dos segmentos circulares de un círculo determinados por la misma cuerda

- *Corona circular*: es la porción del plano delimitada por dos circunferencias concéntricas (figura 128).

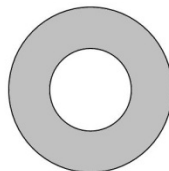


Figura 128. Representación de una corona circular

3.3. Figuras en el espacio

Como se ha comentado en el punto 3.1.1, dos rectas secantes determinan un plano. Si se considera una tercera recta no coplanaria con estas y que sea perpendicular a las dos, aparece una nueva dimensión que completa las que ya tenía el plano. Estas tres dimensiones configuran el ente geométrico llamado espacio, que es el conjunto de todos los puntos existentes, introducido en 2.1.

Cualquier plano del espacio divide a este en dos regiones llamadas semiespacios, que incluyen el plano.

3.3.1. Ángulos en el espacio

Si consideramos dos planos en el espacio, las posiciones que pueden tener son:

1. *Planos secantes*: tienen solo una recta en común (figura 129). Analíticamente $\pi_1 \cap \pi_2 = r$.

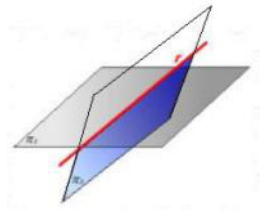


Figura 129. Representación de dos planos secantes

2. *Planos paralelos no coincidentes*: no tienen ningún punto en común (figura 130). Analíticamente $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$.

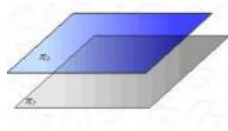


Figura 130. Representación de dos planos paralelos no coincidentes

3. *Planos paralelos coincidentes*: tienen todos los puntos en común (figura 131). Analíticamente $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$.

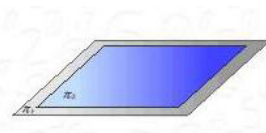


Figura 131. Representación de dos planos paralelos coincidentes

Cuando dos planos son secantes, determinan cuatro regiones en el espacio. Se denomina ángulo diedro o simplemente diedro, a cada una de estas regiones, incluyendo los semiplanos que las delimitan (figura 132). La recta común a los dos semiplanos se denomina arista del ángulo diedro. Obtenemos la medida de este ángulo si medimos la amplitud del ángulo plano que determinan dos semirrectas de origen común contenidas en cada uno de los semiplanos y que sean perpendiculares a la recta de intersección de estos.

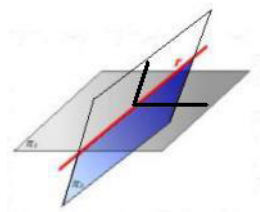


Figura 132. Representación de los elementos de un ángulo diedro

Cuando el número de planos que consideramos en el espacio es superior a dos, la cantidad de posiciones en las que nos los podemos encontrar aumenta considerablemente. Nos fijaremos únicamente en las situaciones en las que todos los planos tienen solo un punto en común y consideraremos las semirrectas de origen común en ese punto, de forma que el plano determinado por cada dos semirrectas consecutivas deja a todas las demás en el mismo semiespacio. Denominaremos ángulo poliedro convexo a la intersección de todos los semiespacios determinados por los planos que cada pareja de estas semirrectas consecutivas define (figura 133).

El origen común de las semirrectas es el vértice del ángulo, cada una de ellas es una arista del ángulo poliedro y la porción de superficie plana limitada por cada dos semirrectas consecutivas (el ángulo bidimensional que determinan) se denomina cara del ángulo.

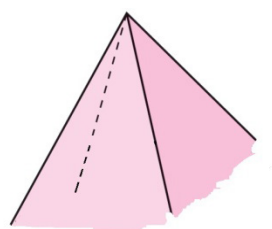


Figura 133. Representación de un ángulo poliedro

En el caso de tres planos con un punto en común, el ángulo recibe el nombre de ángulo triedro o simplemente triedro. Cuando el número de planos que determinan el ángulo, n , es igual o superior a cuatro, este se nombra bien con las raíces griegas o bien con la expresión ángulo poliedro con n caras.

La medida de un ángulo poliedro se obtiene al sumar las amplitudes de todos los ángulos bidimensionales que determinan las parejas de aristas consecutivas del mismo. La amplitud del ángulo tiene que ser menor que 360° , pues si se llegara a esta cantidad de grados, la superficie que formarían las caras del ángulo poliedro sería un plano en el espacio y dejaría de limitar un ángulo poliedro.

3.3.2. Cuerpos geométricos

Además de las superficies planas, en el espacio podemos encontrar superficies que no lo son y que se denominan curvas. A diferencia de las superficies planas finitas, que siempre son abiertas, las superficies finitas curvas pueden ser abiertas o cerradas (cuando no rodean o sí rodean una zona del espacio, respectivamente).

Un cuerpo geométrico es una figura geométrica que resulta de considerar una parte del espacio limitada por una superficie cerrada simple (la que solo delimita una región interior en el espacio) incluyendo esta superficie. Estas figuras también se denominan sólidos.

Análogamente a las superficies planas cóncavas y convexas, se pueden definir los cuerpos geométricos cóncavos y convexos.

Para el trabajo que se realiza en el aula de primaria, consideraremos dos tipos de cuerpos geométricos: los poliedros y los cuerpos redondos. Los primeros estarán delimitados por polígonos y los segundos por superficies curvas y/o superficies planas no poligonales.

3.3.2.1. Poliedros

Son los cuerpos geométricos limitados por superficies cerradas simples compuestas por polígonos. A cada uno de estos polígonos se le llama cara del poliedro. Los lados de los polígonos se denominan aristas del poliedro y sus vértices son también vértices del poliedro. En cada una de las aristas se forma un ángulo diedro y en cada uno de los vértices un ángulo poliedro.




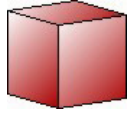
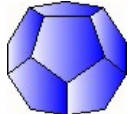
Cualquier poliedro convexo tiene, al menos, cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas. Un vértice de un poliedro pertenece, al menos, a tres caras y a tres aristas. En cualquier poliedro convexo se cumple la fórmula de Euler, que relaciona el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A), según la expresión: $C + V = A + 2$.

Podemos clasificar los poliedros en función de las siguientes características: la regularidad de las caras, la igualdad de estas y la igualdad de los ángulos del mismo tipo que se forman en el poliedro. Obtendremos, así, dos clases, la de los poliedros regulares y la de los que no lo son. Si un poliedro verifica las tres condiciones anteriores diremos que es regular o platónico. Si no verifica alguna de las condiciones anteriores, diremos que es irregular. En particular, si verifica la primera y la tercera pero no la segunda, diremos que es arquimediano.

POLIEDROS REGULARES

Estudiaremos cuáles son los poliedros regulares que existen y cómo se construyen a partir de los polígonos que los delimitan.

Teniendo en cuenta que la medida de un ángulo poliedro debe ser menor que 360° y que, como mínimo, en cada vértice tienen que concurrir tres caras, nos aparecen los siguientes sólidos platónicos:

CARAS	Número de caras por vértice	Suma de los ángulos	Poliedro	Representación
Triángulos equiláteros	3	$3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$	TETRAEDRO REGULAR	
	4	$4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$	OCTAEDRO REGULAR	
	5	$5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$	ICOSAEDRO REGULAR	
	6	$6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$	No existe	
Cuadrados	3	$3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$	CUBO HEXAEDRO-REGULAR	
	4	$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$	No existe	
Pentágonos regulares	3	$3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$	DODECAEDRO REGULAR	
	4	$4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$	No existe	
Hexágonos regulares	3	$3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$	No existe	

Y como se ve, a partir del hexágono regular, no se puede formar ningún ángulo poliedro porque la suma de tres ángulos de cualquier otro polígono regular siempre será superior a 360° y, por tanto, no se podrá determinar ningún poliedro. Entonces, solo se pueden formar poliedros regulares con triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos regulares.

A continuación prestaremos atención a la construcción de estos cuerpos:

Cuando son triángulos equiláteros:

A partir de la red de triángulos equiláteros que ya se ha estudiado (véase 3.2.3.1 de este tema), nos fijamos solo en una parte, la que forma un hexágono (figura 134).

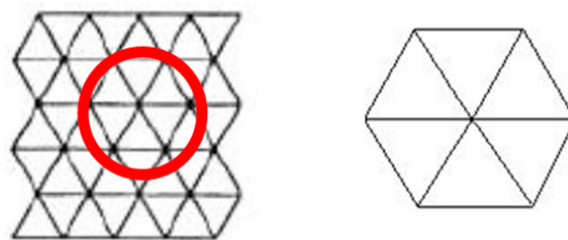


Figura 134. Representación de una red de triángulos equiláteros (izquierda) y una selección de seis (derecha)

Está claro que este hexágono no se puede doblar para formar una figura susceptible de ser un cuerpo geométrico (como se puede ver en el cuadro anterior). Hará falta, pues, quitar triángulos para poder hacerlo.

Si se quita uno de los triángulos, el cuerpo que se puede formar tendrá vértices en los que confluyan cinco caras que son triángulos equiláteros. Para que el cuerpo cumpla todas las condiciones de regularidad, necesitamos quince triángulos equiláteros más, y el que se obtiene recibe el nombre de icosaedro regular (figura 135).

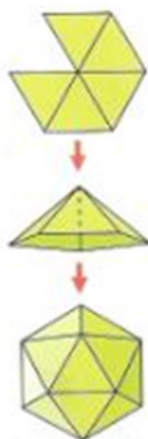


Figura 135. Representación de la construcción de un icosaedro regular

Si se quitan ahora dos triángulos equiláteros, el cuerpo que se puede formar tendrá vértices en los que confluyan cuatro triángulos equiláteros. Para completar el cuerpo regular en este caso, necesitamos cuatro triángulos equiláteros más y el que se obtiene es un octaedro regular (figura 136).



Figura 136. Representación de la construcción de un octaedro regular

Por último, si son tres los triángulos que se quitan, el cuerpo que se puede formar tendrá vértices en los que confluirán tres triángulos equiláteros. Solo necesitaremos otro para completar el cuerpo geométrico que se conoce como tetraedro regular (figura 137).

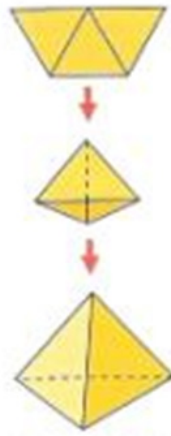


Figura 137. Representación de la construcción de un tetraedro regular

Nota: En general, cualquier poliedro con todas las caras triángulos equiláteros, se llama deltaedro.

Cuando son cuadrados:

A partir de la red formada por cuadrados (figura 138) y cogiendo solo cuatro de ellos, se puede seguir un procedimiento semejante.

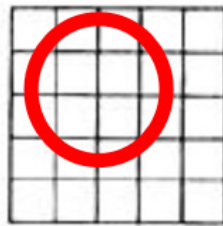


Figura 138. Representación de una red de cuadrados

Como necesitamos tres caras para conseguir un vértice, solo se puede quitar uno de los cuadrados. Harán falta tres cuadrados más para completar el cuerpo geométrico que se denomina hexaedro regular o cubo (figura 139).

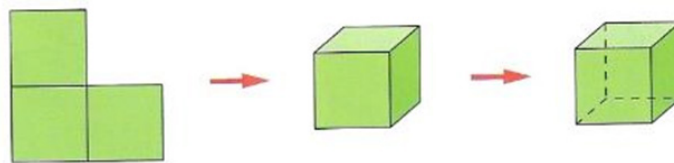


Figura 139. Representación de la construcción de un cubo

Cuando son pentágonos regulares:

En este caso no se puede partir de una red plana, no existe, puesto que con pentágonos regulares no se puede recubrir el plano, pero sí que se puede formar un

poliedro. Al construir el vértice haciendo coincidir tres caras en este, la suma de los ángulos que lo forman es menor que 360° , pues cada uno de los ángulos interiores de un pentágono regular mide 108° .

En este caso necesitaremos nueve pentágonos más para completar el cuerpo que se llama dodecaedro regular (figura 140).

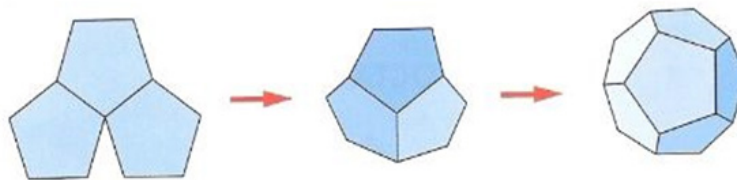


Figura 140. Representación de la construcción de un dodecaedro regular

Dentro del conjunto de los poliedros, encontramos unas familias muy particulares, la de los prismas y la de las pirámides que, por la gran variedad de cuerpos que contienen y por su presencia en la realidad, serán las primeras que estudiaremos.

PRISMAS

Un prisma es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos que se unen mediante tantos paralelogramos como lados tengan aquellos (figura 141). Los polígonos mencionados se denominan bases o caras básicas (homólogos en una traslación, véase 3.4.1.1 de este tema) y los paralelogramos, caras laterales. La altura del prisma es el segmento de la perpendicular a las dos bases comprendido entre ellas.

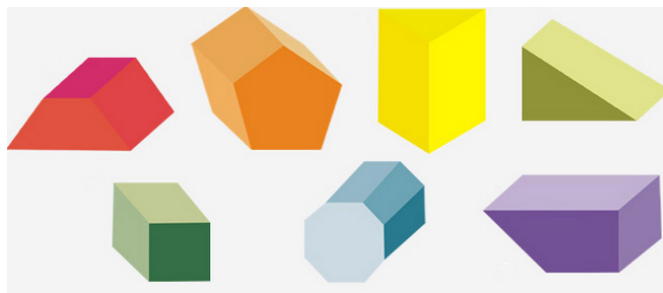


Figura 141. Representación de prismas de diferentes bases

Si las bases del prisma son polígonos cóncavos o convexos el prisma será cóncavo o convexo, respectivamente.

Si todas las caras laterales son rectángulos, serán perpendiculares a las bases, y el cuerpo se denominará prisma recto. Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases, se llama prisma oblicuo (figura 142).



Figura 142. Representación de un prisma oblicuo

Si las bases de un prisma recto son polígonos regulares, el prisma es regular.

Las aristas laterales de un prisma son segmentos iguales y paralelos entre sí. En los prismas rectos son perpendiculares a las bases.

Según las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc., el prisma se llamará triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.

El desarrollo plano de un prisma es el resultado de desplegar y colocar sobre un plano todas sus caras de forma que cada dos contiguas estén unidas por una arista. Vemos, por ejemplo, en la figura 143, el caso de un prisma regular hexagonal.

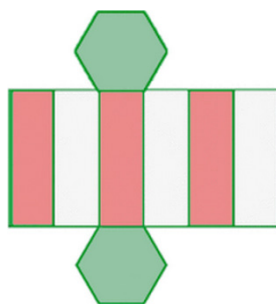


Figura 143. Representación del desarrollo plano de un prisma regular hexagonal
(imagen proporcionada por *narceaeduplastica.weebly.com*)

Es importante destacar que la expresión «desarrollo plano de un cuerpo geométrico» se refiere solo al de la superficie que limita el cuerpo y no al del cuerpo completo que es sólido y macizo y que, evidentemente, no se puede desarrollar en un plano.

Paralelepípedos:

Un paralelepípedo es un prisma cuyas caras son todas paralelogramos. Cada dos caras opuestas son iguales (figura 144).

Si las bases son cuadrados, este paralelepípedo será un prisma cuadrangular, ya mencionado anteriormente.

Si todas las caras son rectángulos, se denomina ortoedro. Si son cuadrados, se llama hexaedro regular o cubo, también ya mencionado. Si son rombos, será un romboedro.



Figura 144. Representación de un ortoedro

PIRÁMIDES

Una pirámide es un poliedro limitado por un polígono cualquiera, su base, unido a tantos triángulos como lados tiene esta, sus caras laterales, que coinciden en un vértice común denominado vértice, cúspide o ápice de la pirámide, en el que todos los triángulos forman un ángulo poliedro. La altura es el segmento de la perpendicular a la base trazada por el vértice de la pirámide, que tiene por extremos el propio vértice y la intersección de esta perpendicular con el plano que contiene a la base de la pirámide.

Si la base de la pirámide es un polígono cóncavo o convexo, la pirámide se llama cóncava o convexa, respectivamente.

Si las caras laterales son triángulos isósceles (pueden ser también equiláteros), la pirámide se denomina recta. En caso contrario, será oblicua (figura 145).

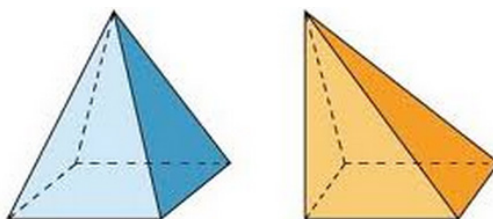


Figura 145. Representación de una pirámide cuadrangular recta (izquierda) y de una oblicua (derecha)

Si la base de una pirámide recta es un polígono regular, esta será una pirámide regular. El vértice de la pirámide regular se proyecta sobre el centro de su base.

En una pirámide regular todas las aristas laterales son de la misma longitud y las caras laterales son triángulos isósceles iguales. Las alturas de los triángulos son las apotemas de la pirámide.

Según las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc., la pirámide se llamará triangular, cuadrangular, pentagonal...

Vemos en la figura 146 un ejemplo del desarrollo plano de una pirámide regular cuadrangular.

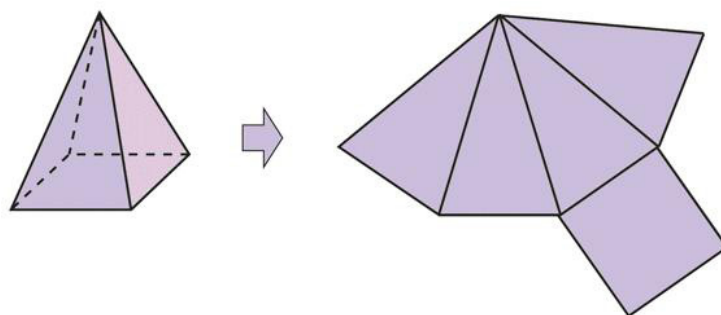


Figura 146. Representación del desarrollo plano de una pirámide regular cuadrangular

Tronco de pirámide

Cuando se corta una pirámide por un plano paralelo al de la base, el cuerpo comprendido entre los dos planos se denomina tronco de pirámide (figura 147).

Un tronco de pirámide tiene dos bases que son polígonos semejantes (homólogos en una semejanza, véase 3.3.2.4 de este tema). La altura del tronco es el segmento de la perpendicular a los planos que contienen las dos bases, comprendido entre estos.

Si la pirámide es regular, el tronco de pirámide correspondiente también se denomina regular. Las caras laterales son trapecios isósceles iguales. La altura de cada uno de ellos es la apotema del tronco de pirámide.

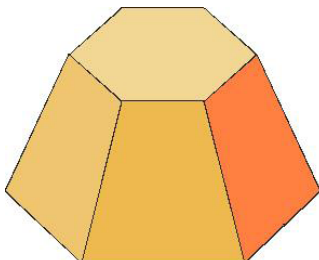


Figura 147. Representación de un tronco de pirámide regular hexagonal

3.3.2.2. Cuerpos redondos

Serán aquellos cuerpos geométricos limitados por superficies cerradas simples en las que todas las caras sean superficies curvas y/o planas no poligonales.

Aunque existen muchos cuerpos de este tipo, nos interesaremos particularmente por aquellos que derivan del círculo o que contienen círculos entre las superficies que los delimitan.

Empezaremos hablando de los cuerpos de revolución que son los sólidos que resultan al girar una figura plana alrededor de un eje, llamado eje de revolución. En

función de cómo sea esta figura, obtendremos diferentes cuerpos. Estudiaremos a continuación los más representativos para el aula de primaria: el cilindro y el cono recto y la esfera.

CILINDRO

Si se hace girar una recta, llamada generatriz, alrededor de un eje paralelo a ella, se genera una superficie infinita, en forma de tubo, que denominamos superficie cilíndrica circular recta. El cuerpo que queda delimitado al cortar una de estas superficies por dos planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje de revolución, se llama cilindro circular recto. La intersección de estos planos con la superficie cilíndrica da lugar a dos circunferencias que determinan dos círculos. Estos dos círculos son las bases del cilindro y la superficie cilíndrica comprendida entre ellas es la superficie o cara lateral del cilindro.

De manera más intuitiva podemos definir el cilindro circular recto, de ahora en adelante cilindro recto, como el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que generan los dos lados perpendiculares al que actúa como eje de revolución, son las bases del cilindro.

La altura, h , es el segmento de la perpendicular a los planos que contienen las bases comprendido entre estos y el radio de las bases es el radio del cilindro, r .

De manera análoga a los poliedros, podemos obtener el desarrollo plano de un cuerpo redondo. En la figura 148 se muestra un cilindro recto y el desarrollo plano de este.

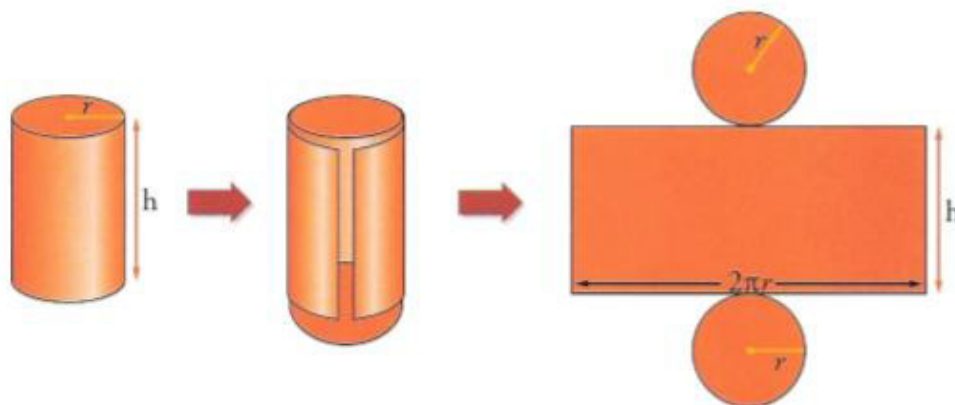


Figura 148. Representación de un cilindro circular recto y su desarrollo plano

Cuando la generatriz del cilindro circular no es perpendicular a las bases, el cilindro se denomina oblicuo, como se muestra en la figura 149.

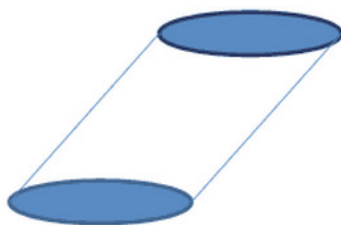


Figura 149. Representación de un cilindro oblicuo

Se puede extender la idea de cilindro, tanto recto como oblicuo, a otros cuerpos redondos cuyas bases no son círculos, sino superficies planas que pueden estar delimitadas por elipses u otros tipos de líneas curvas cerradas planas (figura 150).

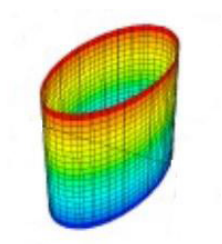


Figura 150. Representación de un cilindro elíptico

La superficie cilíndrica también se puede entender como la superficie generada por una recta que se desplaza paralela a sí misma y tangente a una línea curva cerrada que se llama directriz.

CONO

Si hacemos girar una recta llamada generatriz alrededor de un eje, al que corta, se genera una superficie infinita, en forma de dos cucuruchos con el vértice común, que denominamos superficie cónica. El cuerpo que queda delimitado al cortar la superficie cónica anterior por el vértice y por un plano perpendicular al eje de revolución se llama cono circular recto. La intersección de este plano con la superficie cónica da lugar a una circunferencia que determina un círculo. Este círculo es la base del cono y la superficie cónica comprendida entre esta y el vértice es la superficie o cara lateral del cono.

Análogamente al caso del cilindro, podemos definir el cono circular recto, o simplemente cono recto, como el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que genera al girar el otro cateto del triángulo es la base del cono.

El segmento de la generatriz comprendido entre el vértice y la base, es la generatriz del cono, g . La altura, h , es el segmento de la perpendicular al plano que contiene a la base del cono trazada por el vértice y comprendido entre este y el mencionado plano. El radio de la base es el radio del cono, r . En el caso de los conos rectos, la altura une el vértice con el centro del círculo de la base.

Del mismo modo que en el caso del cilindro, podemos obtener el desarrollo plano de un cono, como se muestra en la figura 151.

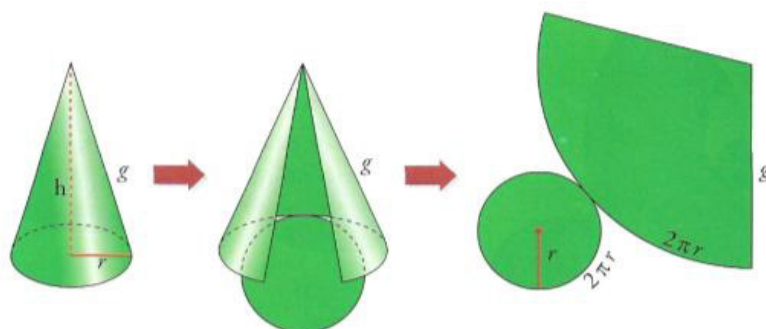


Figura 151. Representación de un cono circular recto y su desarrollo plano

Cuando el plano que contiene a la base del cono circular no es perpendicular al eje de revolución, el cono se denomina oblicuo (figura 152). En este caso, la altura del cono no pasa por el centro de la base.

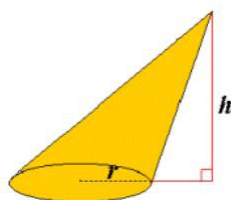


Figura 152. Representación de un cono oblicuo

Se puede extender la idea de cono, tanto recto como oblicuo, a otros cuerpos redondos cuya base no es un círculo, sino una superficie plana que puede estar delimitada por elipses u otros tipos de líneas curvas cerradas planas.

La superficie cónica también se puede entender como la superficie generada por una recta que se desplaza manteniendo fijo uno de los puntos de la misma y de manera tangente a una línea curva cerrada que se llama directriz.

Tronco de cono

Si se corta un cono por un plano paralelo al que contiene a la base, el cuerpo geométrico comprendido entre los dos planos, se denomina tronco de cono (figura 153).

El tronco de cono recto es un cuerpo de revolución que se genera haciendo girar un trapecio rectángulo alrededor del lado perpendicular a las bases. Tiene dos caras básicas circulares y la altura es el segmento de la perpendicular a los planos que contienen a las bases comprendido entre estas. La generatriz, g , es el segmento que ha generado la superficie lateral y, por lo tanto, es el lado del trapecio no perpendicular a las bases.

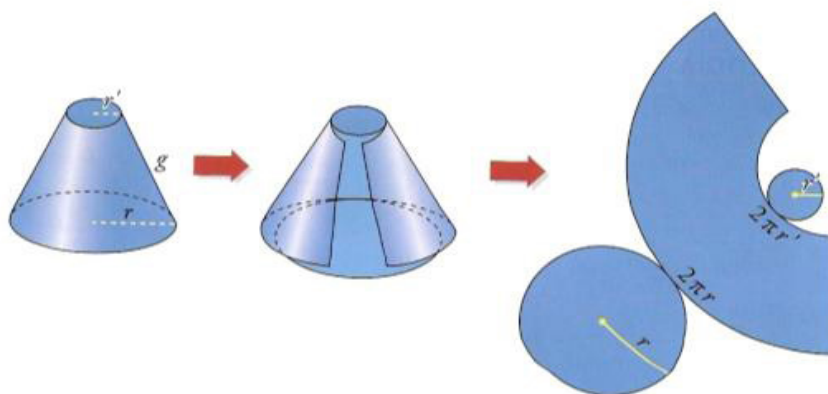


Figura 153. Representación de un tronco de cono recto y su desarrollo plano

ESFERA

La esfera se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de un eje que contiene al diámetro que lo determina. También se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia a un punto llamado centro es menor o igual que un valor R llamado radio.

La superficie de la esfera, llamada superficie esférica, se genera al hacer girar una semicircunferencia alrededor del diámetro. Solo se puede desarrollar sobre el plano aproximadamente, pero no de manera exacta.

A continuación se definen algunas figuras derivadas de la esfera y la superficie esférica.

Denominamos casquete esférico (figura 154) a cada una de las dos partes de la superficie esférica que resultan de cortar esta con un plano. Si lo que se corta es una esfera, las dos partes resultantes se llaman segmentos esféricos de una base. Si el plano secante pasa por el centro, obtendremos, respectivamente, dos semisuperficies esféricas o dos semiesferas.

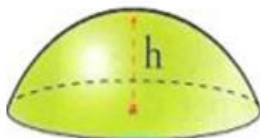


Figura 154. Representación de un casquete esférico

La porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos que la cortan, se denomina zona esférica (figura 155). Si lo que se corta es una esfera, la figura resultante se llama segmento esférico de dos bases.

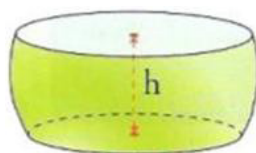


Figura 155. Representación de una zona esférica

Si se considera un ángulo diedro, cuya arista contiene al diámetro de la esfera, la intersección de este con la superficie esférica, se denomina huso esférico. La intersección con la esfera se llama cuña esférica (figura 156).

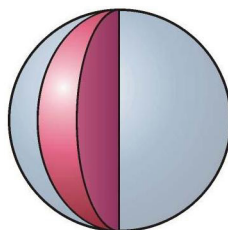


Figura 156. Representación de una cuña esférica

3.4. Transformaciones geométricas en el plano

Como ya se ha explicado en el punto 2.2 de este tema, una transformación geométrica es una aplicación biyectiva del espacio en sí mismo que toma una figura geométrica y la transforma en otra. En este apartado trabajaremos algunas de las transformaciones geométricas planas que se pueden definir. Concretamente, veremos las isometrías y las transformaciones equiformes en el plano.

3.4.1. Movimientos rígidos o isometrías

Un movimiento rígido o isometría es una transformación geométrica que conserva las dimensiones de las figuras. Dicho de otra manera, es una transformación que cumple la siguiente condición: la distancia entre los puntos de la figura original es la misma que la que hay entre sus correspondientes homólogos en la figura transformada. Cuando dos figuras son homólogas por una isometría se dice que son congruentes.

3.4.1.1. *Traslaciones*

Una traslación de vector \vec{v} , $T_{\vec{v}}$ es un movimiento rígido en el plano en el que todos sus puntos se desplazan siguiendo este vector, que se llama vector de traslación. Para ver el comportamiento de estas transformaciones, trabajamos con el ejemplo de la figura 157, donde la traslación está determinada por el vector libre $\vec{v} = AA'$.

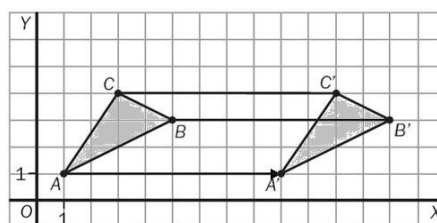


Figura 157. Representación de dos triángulos homólogos por una traslación

En este caso $T_{\vec{v}}(A) = A'$ y la figura homóloga del triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$. Se puede comprobar que las distancias entre dos puntos y sus correspondientes transformados son iguales ($d(A,C) = d(A',C')$, por ejemplo) o lo que es lo mismo, se conservan las distancias, por tanto, es una isometría.

Como se ve en la figura 157, el sentido de orientación del plano que determinan los puntos A , B y C es el mismo que el determinado por sus respectivos homólogos A' , B' y C' , es decir, la traslación es una isometría que conserva el sentido de orientación del plano. Por esta razón, las traslaciones se denominan movimientos directos.

Cuando el vector $\vec{v} = \mathbf{0}$, la traslación es la transformación identidad y entonces para cualquier punto P del plano: $T_o(P) = P$.

3.4.1.2. Giros o rotaciones

Un giro o rotación de centro O y ángulo α , $G_{O,\alpha}$, es un movimiento rígido en el plano por el que un punto cualquiera de este P distinto de O se transforma en otro punto P' , de manera que $\widehat{POP'} = \alpha$, $d(O,P) = d(O,P')$ y el centro de giro O es un punto fijo que se transforma en él mismo: $G_{O,\alpha}(O) = O$.

El ángulo de giro viene determinado por la amplitud de este y un sentido de giro. Este sentido será negativo cuando coincida con el movimiento de las agujas del reloj y positivo en caso contrario.

Para ver un ejemplo de giro, trabajamos con la figura 158, donde el centro de giro es el origen de coordenadas y el ángulo de giro es $\alpha = +90^\circ$.

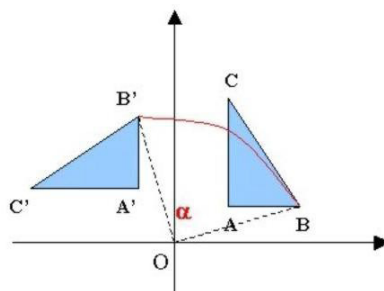


Figura 158. Representación de dos triángulos homólogos por un giro

En este caso, $G_{O,+90^\circ}(B) = B'$ y la figura homóloga del triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$. Se puede comprobar también que las distancias entre dos puntos y sus correspondientes transformados son iguales ($d(A,C) = d(A',C')$, por ejemplo) o lo que es lo mismo, se conservan las distancias, por lo tanto, es una isometría.

Como se ve en la figura 158, el sentido de orientación del plano que determinan los puntos A , B y C es el mismo que el determinado por los respectivos homólogos de estos A' , B' y C' , es decir, el giro es una isometría que conserva el sentido de orientación del plano. Por esta razón, los giros se denominan también movimientos directos.

Cuando el ángulo es 0° el giro es la transformación identidad y para cualquier punto P del plano: $G_{O,0^\circ}(P) = P$.

Y cuando el ángulo es 180° , el giro se llama simetría central: $G_{O,180^\circ} = S_O$. Un ejemplo de estas transformaciones se ve en la figura 159, donde O es el punto $(0,+1)$.

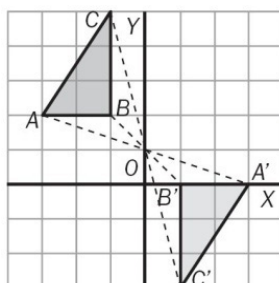


Figura 159. Representación de dos triángulos homólogos por una simetría central (giro de 180°)

3.4.1.3. Simetrías axiales

Una simetría axial de eje e , S_e , es un movimiento rígido en el plano en el que uno de sus puntos, P , exterior a la recta e , se transforma en otro punto P' de manera que la recta e es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ y cualquier punto Q del eje de simetría se transforma en él mismo, $S_e(Q) = Q$, es decir, el eje de simetría es homólogo de sí mismo, $S_e(e) = e$.

Para ver un ejemplo de simetría axial, trabajamos con la figura 160, donde el eje de simetría es la recta vertical e .

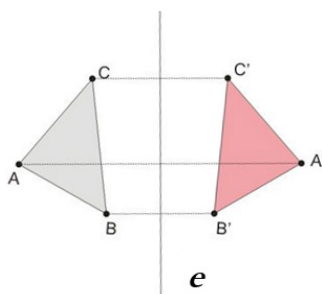


Figura 160. Representación de dos triángulos homólogos por una simetría axial

En este caso, $S_e(A) = A'$ y la figura homóloga del triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$. Análogamente a las transformaciones anteriores, se puede comprobar que las distancias entre dos puntos y sus correspondientes transformados son iguales ($d(A,C) = d(A',C')$, por ejemplo) o lo que es el mismo, se conservan las distancias, por lo tanto, es una isometría.

Como se ve en la figura 160, el sentido de orientación del plano que determinan los puntos A , B y C es inverso al determinado por sus respectivos homólogos A' , B' y C' . La simetría axial es, por lo tanto, un movimiento que cambia el sentido de orientación del plano. Por esta razón las simetrías axiales se denominan movimientos inversos.

3.4.1.4. Composición de movimientos en el plano

Si aplicamos sucesivamente dos movimientos a una figura geométrica plana obtenemos como resultado una figura congruente con la primera. Diremos que estas dos figuras son homólogas mediante una composición de movimientos. Intuitivamente lo que se hace es desplazar y girar la figura original, o desplazarla dos veces, o girarla y después desplazarla...

Cuando componemos dos simetrías axiales obtenemos como resultado traslaciones o giros según los ejes de las simetrías sean, respectivamente, paralelos o secantes. Podemos observar estas composiciones en la figura 161.

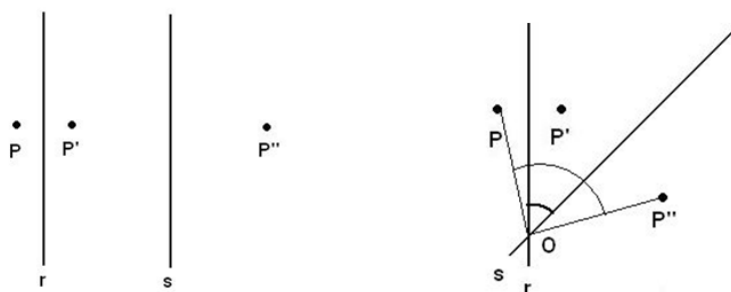


Figura 161. Representación de dos composiciones de simetrías axiales: ejes paralelos (izquierda) y ejes secantes (derecha)

En el caso de los ejes paralelos, el punto P se ha trasladado a P'' de acuerdo con el vector de traslación $\vec{PP''}$, de dirección perpendicular a los ejes de las simetrías, cuyo sentido tiene origen en P y extremo en P'' y de módulo $|\vec{PP''}| = 2 \cdot d(r,s)$.

Si los ejes se cortan en el punto O y forman un ángulo agudo α , el punto P se ha transformado en P'' , según un giro de centro O y de ángulo $\angle POP'' = 2 \cdot \alpha$.

3.4.2. Transformaciones equiformes

Una transformación geométrica equiforme es la que transforma una figura en otra de la misma forma y dimensiones proporcionales a las de la original. Cuando dos figuras son homólogas por una transformación equiforme se dice que son semejantes.

3.4.2.1. Proporcionalidad de segmentos

Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} , definimos razón entre ellos como la razón numérica entre sus respectivas longitudes, calculadas respecto de una unidad de medida común. Es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{d(A,B)}{d(C,D)}$.

Si tenemos dos pares de segmentos \overline{AB} y \overline{CD} , \overline{PQ} y \overline{RS} , diremos que son proporcionales si las razones entre los segmentos de cada par son iguales, es decir: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$. A este valor se le llama razón de proporcionalidad entre los pares de segmentos.

3.4.2.2. Teorema de Tales

Una aplicación directa de la definición de proporcionalidad entre segmentos que acabamos de ver es el conocido teorema de Tales: «Si tres rectas paralelas a , b y c cortan a dos rectas secantes r y r' , los segmentos que se determinan en ellas son proporcionales». Una representación geométrica de este teorema se ofrece en la figura 162.

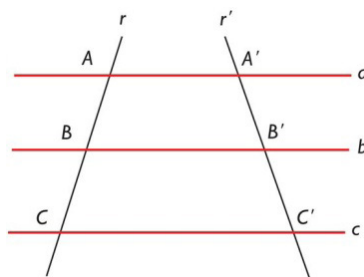


Figura 162. Representación geométrica del teorema de Tales

De la representación anterior, se desprende la siguiente relación entre las medidas de los segmentos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Este teorema es muy importante para trabajar la semejanza de figuras en general y en particular la de triángulos.

3.4.2.3. Homotecias

Una homotecia de centro O y razón $k \in \mathbb{R}$, $H_{O,k}$, es una transformación geométrica en el plano en la que un punto cualquiera de este P distinto de O , se transforma en otro punto P' , situado sobre la recta OP tal que $\overline{OP'} = k \cdot \overline{OP}$ y el punto O permanece fijo.

Como se observa en la figura 163, $H_{O,k}(A) = A'$ y como $k > 0$ el punto A' pertenece a la semirrecta OA . La figura homóloga del pentágono $ABCDE$ es el pentágono $A'B'C'D'E'$.

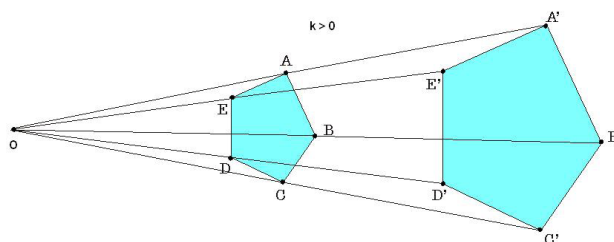


Figura 163. Representación de dos pentágonos homólogos por una homotecia de razón positiva

Análogamente, si $k < 0$ el punto A' pertenece a la semirrecta opuesta a OA , como se observa en la figura 164.

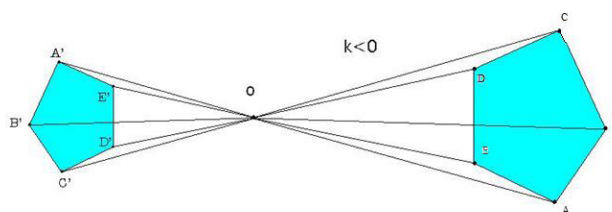


Figura 164. Representación de dos pentágonos homólogos por una homotecia de razón negativa

Observamos que si $|k| > 1$ las longitudes que se pueden medir en la figura homóloga son proporcionalmente mayores que las correspondientes de la figura original, es decir, la figura homóloga es una ampliación de la inicial.

Si $0 < |k| < 1$ las longitudes de la figura homóloga son proporcionalmente menores que las correspondientes de la figura original, es decir, la figura homóloga es una reducción de la inicial.

En las figuras anteriores se puede ver una ampliación en el primer caso y una reducción en el segundo.

3.4.2.4. Semejanzas

Una semejanza es una transformación geométrica en el plano que resulta de la composición de una homotecia y un movimiento rígido o al revés.

Como ya se ha mencionado, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma y las dimensiones de los segmentos homólogos son proporcionales (figura 165).

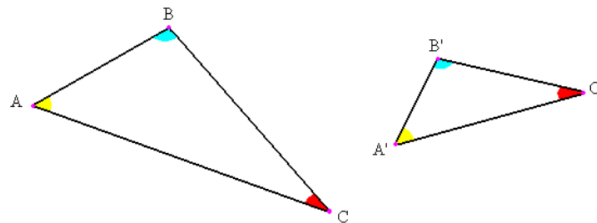


Figura 165. Representación de dos triángulos semejantes

De esta definición se deduce que cualquier homotecia es una semejanza donde el movimiento rígido utilizado en la composición de transformaciones es la identidad.

Del mismo modo se puede deducir también que un movimiento es una semejanza cuya homotecia es de razón $+1$.

3.5. Transformaciones geométricas en el espacio

Todas las transformaciones vistas en el plano tienen sus correspondientes en el espacio.

La definición de traslación espacial es idéntica a la que se ha dado para el caso del plano, teniendo en cuenta que las figuras son tridimensionales y los vectores han de situarse en el espacio.

La definición de giro en el espacio es análoga a la de giro en el plano, con la diferencia de que, en el espacio, se gira alrededor de un eje que se mantiene fijo, en lugar de girar alrededor de un punto.

Una simetría axial en el espacio es un giro espacial cuyo eje es el de la simetría y la amplitud del ángulo de giro es de 180° .

La definición de homotecia espacial es análoga a la que se ha dado en el caso de la plana, teniendo en cuenta que las figuras son tridimensionales.

La definición de semejanza espacial es idéntica a la que se ha dado para el caso del plano, teniendo en cuenta que las figuras son tridimensionales.

Como la simetría especular en el espacio es una transformación que no procede de la generalización al espacio de ninguna transformación plana, se va a tratar de manera más detallada.

3.5.1. Simetría especular

Una simetría especular respecto del plano π , S_π es una transformación geométrica en el espacio donde uno de sus puntos, A , exterior al plano π , se transforma en otro punto A' de manera que π es el plano «mediatriz» del segmento $\overline{AA'}$ y cualquier punto Q del plano de simetría se transforma en él mismo, $S_\pi(Q) = Q$, es decir, el plano de simetría es homólogo de sí mismo, $S_\pi(\pi) = \pi$. Un ejemplo de simetría especular la encontramos en la figura 166.

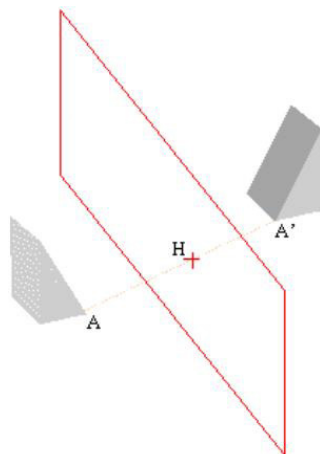


Figura 166. Representación de dos prismas triangulares homólogos por una simetría especular

4. La iniciación a la geometría en el aula de infantil

4.1. Capacidades a desarrollar en el aula de infantil

Establecer los primeros pasos de manera adecuada en la educación infantil respecto de las primeras nociones espaciales y geométricas será el objetivo del tema, que contribuirá a desarrollar en el alumnado las capacidades siguientes:

1. Aplicar las nociones de orientación estática (delante-detrás, arriba-abajo, a un lado-al otro lado) al propio cuerpo y experimentar la direccionalidad que surge del mismo.
2. Aplicar las nociones de orientación espacial a la situación del propio cuerpo y de los objetos.
 - 2.1. Situar objetos en el espacio y reconocer la situación de los objetos en relación al propio cuerpo.
 - 2.2. Situar en el espacio y reconocer la situación del propio cuerpo en relación a los objetos.

- 2.3. Situar objetos en el espacio y reconocer posiciones de estos en relación a otros objetos.
3. Aplicar las nociones de orientación espacial al trabajo con representaciones gráficas.
 4. Recorrer, reconocer, construir y dibujar trayectos y laberintos.
 5. Reconocer y reproducir el orden espacial: lineal y cíclico.
 6. Iniciar una primera aproximación intuitiva a las nociones de punto, línea, superficie y espacio. Reconocer líneas, superficies y volúmenes en el espacio que nos rodea.
 7. Distinguir líneas y superficies abiertas y cerradas. Construir líneas y superficies abiertas y cerradas y modificar su forma y longitud sin alterar su propiedad.
 8. Experimentar las nociones «dentro» y «fuera» en relación con los términos «abierto» y «cerrado». Adquirir las nociones de frontera y región.
 9. Distinguir, construir y representar líneas rectas y curvas. Distinguir la horizontalidad o verticalidad de la línea recta.
 10. Experimentar la intersección de líneas. Reconocer nudos y redes.
 11. Distinguir y construir superficies planas y curvas.
 12. Reconocer, nombrar, construir y representar las figuras geométricas planas: círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo.
 13. Reconocer y nombrar los cuerpos geométricos: cubo y esfera.
 14. Componer y descomponer figuras y cuerpos geométricos.
 15. Iniciar la idea de simetría en el propio cuerpo, en figuras planas y en cuerpos cualesquiera.
 16. Organizar rompecabezas, puzles, cenefas, etc.

4.2. Desarrollo de las capacidades

De nuevo con las mismas consideraciones del apartado 3.3 del tema 1, estudiaremos a continuación los procedimientos para construir los primeros conceptos referentes a nociones espaciales y geométricas en el aula de educación infantil.

1. *Aplicar las nociones de orientación estática (delante-detrás, arriba-abajo, a un lado-al otro lado) al propio cuerpo y experimentar la direccionalidad que surge del mismo*

El espacio en el que vivimos tiene tres dimensiones. Esto quiere decir que una vez situados en alguna parte, podríamos considerar que somos el origen de la gráfica que se muestra en la figura 167.

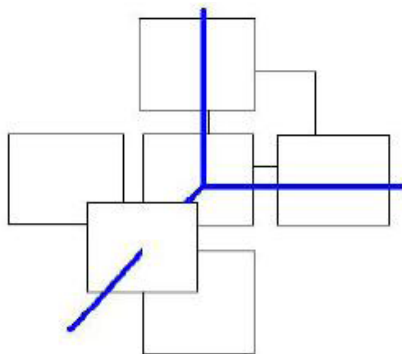


Figura 167. Representación de un sistema tridimensional de ejes

Por lo tanto es importante, en un primer momento, saber nombrar las posiciones que inicialmente nos situarán en este espacio y nos permitirán relacionarnos con él y con todo lo que hay a nuestro alrededor. Las posiciones que aparecen en esta capacidad, delante y detrás, arriba y abajo, a uno y otro lado, son las primeras que se trabajan porque ofrecen al alumnado un conjunto de tres ejes ortogonales en su propio cuerpo, que es el sistema de referencia del espacio tridimensional en el que viven. Es evidente que no usaremos este vocabulario en el aula de infantil, pero lo que se intenta es configurar esta visión espacial con el sistema de referencia, a partir de actividades adecuadas a su desarrollo cognitivo.

Empezaremos desde muy pequeños con el reconocimiento por parte del alumnado de las partes de su cuerpo que tienen delante y las que tienen detrás. Las indicaciones pueden ser muy elementales: lo que está delante es la cara, las rodillas, el ombligo..., aquello que está en la misma parte que los ojos y que pueden ver con facilidad, mientras lo que está detrás es la espalda, el culo..., lo que no podemos ver fácilmente y se encuentra en la parte contraria a los ojos (figura 168).

Más adelante, y tomando como referencia la cintura, observarán qué partes de su cuerpo están arriba y cuáles abajo, trabajando con indicaciones del estilo anterior: la cabeza está arriba, los pies abajo, los hombros arriba, las rodillas abajo... (figura 168).

Como complemento de las posiciones señaladas hasta ahora y hacia la mitad del 2.º ciclo de educación infantil, tenemos que trabajar también con los niños y las niñas el descubrimiento de los dos lados de su cuerpo. No se habla de simetría, pero se utiliza la que está presente en ellos y ellas. Se trata de observar que algunas partes que hay a un lado están también al otro: las manos, los pies, las orejas... Nos podemos ayudar de un espejo, en el que habremos puesto un hilo o una raya que represente el eje de simetría o también de un cordón que se sujete en la frente del alumnado y caiga verticalmente hasta el suelo marcando el mencionado eje para que puedan situar las partes de su cuerpo que se encuentran «a un lado o al otro» (figura 168). Para concretar estas posiciones y denominarlas de manera clara y diferenciada introduciremos, en el último curso de la etapa, el vocabulario izquierda y derecha para referirnos a ellas. Si los niños y las niñas tuvieran problemas para asociar adecuadamente cada palabra con el lado correspondiente, podemos utilizar alguna señal en una de las dos manos para ayudarles a recordarlo (una pegatina, un lazo, una cruz pintada...).

Hemos de tener en cuenta que estos conceptos resultan mucho más complicados para el alumnado que los de delante y detrás o arriba y abajo mencionados anteriormente. La explicación de esta dificultad reside en la simetría, que hace que su cuerpo se desarrolle del mismo modo a uno y otro lado. Estamos poniendo dos nombres diferentes a posiciones que no se lo parecen. Este es el motivo de la confusión entre derecha e izquierda que desaparece normalmente en los primeros cursos de educación primaria.

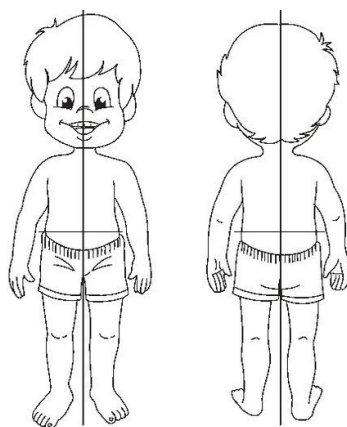


Figura 168. Representación de las nociones de orientación estática en el cuerpo de un niño

Según van identificando las diferentes nociones de orientación espacial trabajadas sobre el cuerpo, se complementa su conocimiento con actividades en las cuales los niños y las niñas mueven todo el cuerpo o una de sus partes de acuerdo con alguna de las direcciones determinadas por las posiciones estudiadas. Así, en sus movimientos habituales, utilizaremos indicaciones del tipo «da un paso hacia delante», «pon los brazos hacia arriba» o «mueve la cabeza hacia un lado», por ejemplo, con la intención que ellos mismos usen también estas formas de expresar la direccionalidad en la que se mueven.

2. Aplicar las nociones de orientación espacial a la situación del propio cuerpo y de los objetos

Esta capacidad amplía al espacio exterior las nociones de orientación estática mencionadas en la anterior e introduce otras nuevas que permiten al alumnado organizar correctamente el espacio que les rodea y todo lo que este contiene.

Se subdivide en tres apartados que establecen diferencias entre las nociones trabajadas, según sea un niño o una niña el punto de referencia para estudiar las posiciones de los objetos, un objeto el punto de referencia para las posiciones del alumnado o un objeto el punto de referencia para las posiciones de otros objetos.

De acuerdo con estas consideraciones, los apartados serán los siguientes:

- 2.1. Situar objetos en el espacio y reconocer la situación de los objetos en relación al propio cuerpo (por ejemplo: pon la silla detrás de ti; trae el papel que tienes delante).
- 2.2. Situarse en el espacio y reconocer la situación del propio cuerpo en relación a los objetos (por ejemplo: ponte detrás de la puerta; de todas las pelotas, trae aquella de la que estés cerca).
- 2.3. Situar objetos en el espacio y reconocer posiciones de objetos en relación a otros objetos (por ejemplo: pon la papelería detrás de la puerta; trae la carpeta que está encima de la mesa).

Para desarrollar estos apartados y como criterio general se considera conveniente prestar atención en primer lugar a actividades de situar objetos o situarse en diferentes posiciones y, más adelante, trabajar las de reconocimiento de estas. Se conectará todo el trabajo con las situaciones cotidianas que se presenten en diferentes momentos de la jornada escolar y se incorporará al habla del alumnado el vocabulario correspondiente de la manera más natural posible.

Se empezará el 2.º ciclo de educación infantil desarrollando los apartados 2.1 y 2.2 con las posiciones siguientes:

- *Delante, detrás*: partiremos de las mismas nociones de orientación estática e identificarán estas posiciones en el espacio asociándolas respectivamente a la zona del mismo que pueden ver sin girarse y a la que no.
- *Arriba, abajo*: de manera análoga al caso anterior, identificarán estas posiciones asociándolas respectivamente a la zona del espacio que queda en un plano superior a su cabeza o inferior a sus pies.
- *Encima, debajo*: para trabajar estas posiciones es muy importante aclarar las relaciones y diferencias que existen entre ellas y las de arriba y abajo mencionadas antes. Hablaremos de encima y debajo cuando los elementos se sitúen por arriba o por abajo de otros y tengan una vertical común con ellos. Por ejemplo, «la pelota se te ha caído abajo del ribazo», el objeto, pelota, está en un plano inferior al que situamos como referencia, el ribazo, pero puede haber una superficie muy grande donde encontrarla. Mientras que si la indicación es «la pelota se te ha caído debajo del puente», habrá que buscarla solo en la superficie que cubre el puente. Debemos observar que siempre que un elemento esté encima (debajo) de otro, está también arriba (abajo) del mismo, pero no es cierto al contrario en todos los casos.

Para trabajar todas estas nociones prestaremos una atención especial a la posición de los niños y de las niñas, que debe ser siempre vertical (de pie, sentado, arrodillado...) pero nunca tumbado, que sería horizontal, donde las intuiciones de arriba, abajo, encima, debajo, etc., varían mucho y pueden conducir a confusión.

- *Cerca, lejos*: en este caso las consideraciones al respecto pueden ser muy variadas dado que no son conceptos absolutos, pero en estas edades se puede llegar al consenso de que estará cerca cualquier elemento que puedan coger sin moverse del lugar donde se encuentran, mientras que para coger un objeto que se encuentra lejos, tienen que iniciar un movimiento que los haga desplazarse.

Hacia la mitad del ciclo ampliaremos las nociones de orientación espacial trabajadas en los dos primeros apartados introduciendo las siguientes posiciones espaciales:

- *A un lado, al otro lado*: de nuevo partiremos de las mismas nociones de orientación estática e identificarán estas posiciones en el espacio asociándolas respectivamente a las zonas del mismo que se extienden a partir de cada uno de los lados de su propio cuerpo.

- *Junto, separado*: en este caso, y para establecer claramente la diferencia entre las dos posiciones, se considerará que dos personas u objetos están juntos o separados en función de la existencia o no de contacto real y permanente entre ellos.
- *Estar entre*: para establecer esta nueva posición espacial y a diferencia de las anteriores se necesitan al menos tres elementos. Se dirá que un objeto se encuentra entre otros dos cuando tiene uno a cada uno de sus lados o uno delante y el otro detrás.
- *Alrededor*: consideraremos ahora varios elementos respecto de otro para hablar de esta posición. Los elementos que se encuentran alrededor de otro ocupan diferentes posiciones individuales respecto del mismo, pero considerados en conjunto se sitúan de forma que este está, más o menos, en el centro de todos ellos. Para poder hablar de esta posición es necesario que hayan, al menos, cuatro elementos.
- *Enfrente de*: para poder hablar con propiedad de esta posición es necesario que los elementos considerados tengan una parte delantera clara. En este caso, diremos que están uno enfrente del otro cuando, además de encontrarse uno delante del otro, estén frente a frente, es decir, cada uno pueda ver la parte delantera del otro, si esta existe claramente.

En el momento en que esté bastante avanzado el conocimiento de las nociones de orientación espacial referidas a los dos primeros apartados en los cuales los niños y las niñas son uno de los elementos que intervienen directamente en las posiciones estudiadas, iremos trabajando en el apartado 2.3 todas estas posiciones pero ahora referidas exclusivamente a objetos respecto a objetos. Es muy importante que el alumnado sea capaz de construir el conocimiento de las posiciones en las cuales su cuerpo es uno de los elementos para poder extenderlo después a las posiciones generales entre objetos, y poder así organizar adecuadamente todo el espacio que les rodea. Además de trabajar con los objetos del entorno, podemos ayudarnos de materiales didácticos específicos, como el que se muestra en la figura 169, con los que pueden crear y reproducir todas las posiciones espaciales antes mencionadas.



Figura 169. Taller de Topología 2 (fabricado per Nathan)

Para completar esta capacidad, y ya en el último curso de la etapa el trabajo se dirigirá, además de a reforzar todas las nociones estudiadas en los cursos anteriores,

a ampliarlas con la introducción de *izquierda* y *derecha* que, a partir de su propio cuerpo, se encaminará a intentar que los niños y las niñas proyecten su lateralidad en los otros elementos que hay en el espacio. Es un trabajo muy importante y que presenta muchas dificultades para construir con claridad la lateralidad de las otras personas y la del espacio en general, y no se puede desarrollar adecuadamente si no está bien construida la lateralidad propia del alumnado.

3. Aplicar las nociones de orientación espacial al trabajo con representaciones gráficas

El objetivo es ahora trasladar las posiciones espaciales estudiadas en las capacidades anteriores al trabajo con representaciones gráficas, sabiendo que es necesario construir estos conceptos primero en la realidad para después pasar al papel.

El alumnado no podrá empezar a desarrollar adecuadamente esta capacidad hasta que no se haya trabajado en la realidad el tercer apartado de la capacidad anterior. Esto no quiere decir que antes los niños y las niñas no dibujen o pinten, pero no podemos esperar corrección y fidelidad en sus representaciones por los niveles cognitivos y de motricidad que alcanzan.

Debemos intentar que el alumnado inicie este trabajo con representaciones de situaciones (juegos o actividades) acabadas de hacer, que tengan utilidad para guardarlas, recordarlas, mostrarlas a otros, etc. (se podría relacionar esta actividad con la representación de secuencias temporales mencionada en el tema anterior). Más adelante, el trabajo gráfico no necesariamente tendrá que estar asociado a ninguna actividad real.

Siguiendo el orden de los apartados 2.1, 2.2 y 2.3 de la capacidad anterior, trabajaremos al principio sobre dibujos en los que aparezca la imagen de un niño o niña. Se trata de que el alumnado se identifique con la imagen y represente o reconozca posiciones de objetos respecto a él o ella. Por ejemplo, «en una representación del patio del colegio en la que se encuentra el niño, se le pide que dibuje el palo que tenía a su lado cuando jugábamos a fútbol», «en una representación del aula donde se encuentra la imagen del niño y otros objetos, le pedimos que pinte de rojo la estantería que está lejos de él o ella».

A continuación, los puntos de referencia serán los objetos representados y el alumnado tendrá que dibujar su imagen o reconocer la posición de esta respecto de ellos. Las actividades serán del tipo «dibújate cerca de la cesta», en un dibujo del patio donde se juega a baloncesto o «colorea tu imagen que está encima del banco que acabas de saltar», en una representación del gimnasio del colegio donde pueden aparecer más niños y niñas en otras posiciones. Más tarde pasaremos al trabajo en el que solo intervienen objetos mediante actividades como «pinta encima de la mesa de la maestra la caja de libros que hemos ido vaciando antes», en una representación del aula de clase o «pinta la estrella que está encima de la cabeza de la vaca», en una imagen nocturna de una granja (figura 170).



Figura 170. Imagen infantil nocturna de unos animales de granja

También tendremos en cuenta la conveniencia de ofrecerles al principio imágenes iniciales a partir de las cuales desarrollen su representación y de dejar que dibujen sin ninguna pista por nuestra parte más adelante.

Hemos de prestar una especial atención a las representaciones de «detrás de» o «alrededor de» por su especial dificultad. En el primero de los casos, será necesario que en el dibujo sobresalga una parte del objeto que esté detrás de otro (figura 171).



Figura 171. Imagen de niños delante y detrás de un árbol

En el segundo se puede confundir con una representación de arriba y abajo si no se han realizado suficientes actividades reales con esta posición y el alumnado no tiene suficiente destreza al interpretar y dibujar la perspectiva. Para resolver este problema podemos situar niños y niñas jugando al corro alrededor de una niña y encima de un papel continuo. Otro niño o niña marcará con un círculo las posiciones de sus compañeros y compañeras y la de la niña central. Después de observar esta representación con el papel en horizontal, lo cambiaremos a la posición vertical para darnos cuenta que lo que ahora parecen otras posiciones (en este caso arriba, abajo, izquierda y derecha) es en realidad la manera de representar «alrededor» de la niña central.

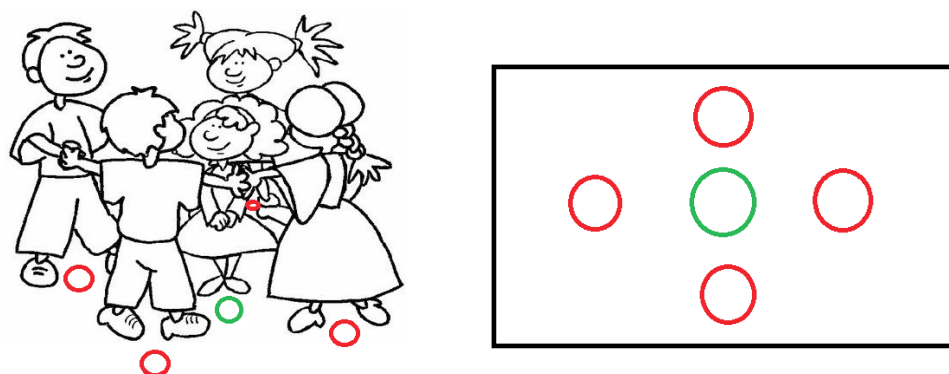


Figura 172. Imagen de un corro de niños y niñas (izquierda) y la representación simbólica de la posición «alrededor de» (derecha)

4. Recorrer, reconocer, construir y dibujar trayectos y laberintos

En esta capacidad continuamos con el conocimiento de la organización espacial incorporando las diferentes posibilidades de movimiento que el alumnado puede desarrollar a partir de sus desplazamientos dentro del espacio.

En este sentido y de manera intuitiva, entenderemos como trayecto, recorrido o itinerario un camino perfectamente determinado que se puede recorrer desde un punto inicial hasta uno final sin necesidad de retroceder en ningún momento y como laberinto un recorrido que no está determinado en el que se pueden encontrar obstáculos que obligan a retroceder y buscar un tramo del camino alternativo al que no se puede recorrer. Se puede considerar el trabajo con laberintos como una manera de aplicar las posibilidades de movimiento por el espacio que se aprenden con las actividades de trayectos o recorridos.

Iniciaremos este trabajo hacia el final del 1er ciclo de educación infantil y en el primer curso del 2.º ciclo, con juegos en los que el alumnado tenga que recorrer trayectos sencillos marcados en el suelo con palos, cuerdas, etc., mediante actividades de rellenar con las manos o los pies mojados de pintura algunos caminos marcados sobre papel continuo o de desplazarse por el espacio de acuerdo con algunas instrucciones del docente (corriendo, saltando, andando hacia atrás...).

Hacia la mitad del 2.º ciclo habrá que complicar un poco más los recorridos y las indicaciones, iniciando también el trabajo con representaciones gráficas. Más adelante introduciremos los laberintos con objetos reales (cajas de cartón, mobiliario escolar, etc.) para pasar después al formato gráfico.

Se pueden organizar recorridos y laberintos dentro del aula, en el edificio del colegio o en el patio, en el barrio o en el pueblo. En el caso de los trayectos, hay diferentes maneras de trabajar:

1. Recorrer un camino real sin tomar nota de lo que se ha recorrido, simplemente señalizando con cuerdas o líneas el trayecto por donde se pasa y verbalizando los diferentes movimientos y cambios de dirección.

2. Completar la actividad anterior con la representación gráfica del recorrido en el plano de manera simultánea al desplazamiento.
3. Recorrer un camino a partir de las indicaciones verbales o gráficas (plano) que han sido proporcionadas por el docente, en un primer momento, u otro grupo de compañeros más adelante.
4. Recorrer un camino en la realidad y, después de realizar la actividad, señalar el trayecto sobre el plano correspondiente verbalizando los diferentes movimientos realizados.

En el caso de los laberintos, encontramos:

1. Recorrer un laberinto real, hecho en clase por la maestra o el maestro, con mesas y sillas, con cajas vacías (por ejemplo de electrodomésticos), etc.
2. Completar la actividad anterior con la representación gráfica del laberinto en el plano de manera simultánea al desplazamiento.
3. Recorrer un laberinto en la realidad y, después de realizar la actividad, señalar el recorrido seguido sobre el esquema del laberinto y verbalizar los diferentes movimientos realizados.
4. A partir de un laberinto representado gráficamente, señalar en este el camino adecuado para llegar del punto de salida al punto de llegada y verbalizar los diferentes movimientos realizados.

Un material didáctico que nos puede ayudar a desarrollar este trabajo es el denominado Pistas mágicas 1 y 2 (figura 173), que nos ofrece diferentes caminos y laberintos representados en relieve sobre superficies de plástico. El alumnado los recorrerá con el dedo, con un rotulador, con el muñequito que acompaña el material o con un imán que moverá el mencionado muñequito desde debajo de las bandejas.



Figura 173. Pistas mágicas 1 y 2 (fabricado por Nathan)

Otro material que también puede ser útil para este trabajo es el geoplano. Consiste en una superficie plana cuadrada y rígida en la que hay una red de pivotes a los que se pueden enganchar gomas elásticas para representar diferentes figuras geométricas planas. Según la disposición de los pivotes, los geoplanos pueden ser de malla cuadrada (los pivotes ocupan vértices de cuadrados iguales), de malla triangular o isométrica (los pivotes ocupan vértices de triángulos equiláteros iguales) y de malla circular (los pivotes ocupan puntos equidistantes de una o de varias circunferencias concéntricas) como se muestran en la figura 174.

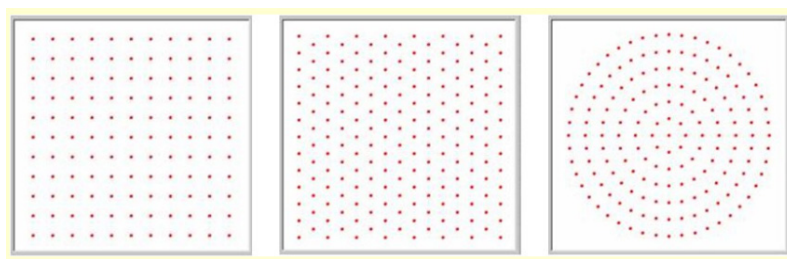


Figura 174. Representación de las mallas de tres geoplanos: cuadrangular (izquierda), triangular (centro) y circular (derecha)

Con la utilización de este material, el alumnado puede construir diferentes trayectos y laberintos con los elásticos y, posteriormente, recorrerlos con el dedo o con algún objeto para escribir (tiza, rotulador...), como se puede ver en la figura 175.

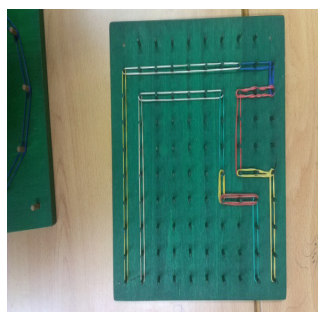


Figura 175. Representación de un trayecto elaborado con elásticos en un geoplano

También hay que intentar, hacia el final de la etapa, que ellos y ellas puedan llegar a construir sus propios laberintos (tanto en la realidad como gráficamente); por ejemplo, diseñándolos en grupos, para resolverlos individualmente o por parte de otro grupo.

5. Reconocer y reproducir el orden espacial: lineal y cíclico

Empezamos en esta capacidad con el desarrollo de los conceptos topológicos en el aula. El objetivo que nos planteamos ahora es reconocer y reproducir las posiciones de algunos puntos en el espacio (que para el alumnado se materializarán en personas, objetos...) y su ordenación.

Para trabajar estos conceptos distinguiremos entre orden lineal y orden cíclico. Así, hablaremos de orden lineal cuando los puntos considerados se encuentren sobre una línea abierta y de orden cíclico cuando lo estén sobre una línea cerrada. También diferenciaremos orden directo y orden inverso, según si la reproducción del orden inicial de los puntos se hace respetando todas sus posiciones o intercambiando las del primero y el último y con ellos las posiciones de todos los demás, respectivamente.

Empezaremos el 2.º ciclo de educación infantil trabajando con el alumnado el orden lineal directo en situaciones cercanas y muy sencillas, donde tengan que reproducir

una ordenación inicial de puntos que les damos como modelo. Por ejemplo, si para preparar la festividad de carnaval tenemos una fila de niños disfrazados de pirata, bombero, indio, jardinero y médico y otra fila del mismo número de niñas sin disfrazar, la actividad consiste en que un alumno o alumna tiene que dar a las niñas los vestidos que necesitan para disfrazarse del mismo modo y en el mismo orden que sus compañeros.

En las primeras actividades de este tipo les marcaremos las posiciones de las imágenes de los puntos de los que partamos (como se ha explicado en el ejemplo anterior) y más adelante ya no lo haremos (las niñas no estarán en fila desde el primer momento, sino que se irán poniendo en su lugar a medida que se desarrolla la actividad).

También tendremos en cuenta, en un primer momento, la necesidad de trabajar con alineaciones del mismo tipo, orientadas del mismo modo respecto del niño o niña que realiza la actividad y manteniendo distancias parecidas entre los puntos originales y entre sus imágenes. En el caso de los disfraces, por ejemplo, el alumno o alumna que reparte los vestidos a sus compañeros observará las dos filas desde una única posición, sin necesidad de girarse para pasar de una fila a la otra (figura 176).



Figura 176. Representación de la reproducción de un orden lineal directo

Hacia la mitad del ciclo se pueden incorporar variaciones en los tipos de líneas (combinando rectas y curvas en las posiciones de los puntos de partida y en las de sus imágenes) y en las distancias entre los puntos, además de realizar actividades en las cuales el alumnado tenga que reproducir gráficamente un orden de puntos conocido también mediante una representación gráfica (copiar objetos de un dibujo en un orden determinado, dibujar cenefas, etc.).

Más adelante, se puede trabajar transformando posiciones de puntos situados sobre líneas horizontales en otras que ocupan líneas verticales, tanto en situaciones reales como gráficas. Por ejemplo, si estamos ordenando un pedido de material escolar que nos ha llegado al aula, tendrán que apilar pastillas de plastilina en el

mismo orden de colores que aparece en una fila de paquetes de cartulinas que ya han guardado en una estantería de la clase (figura 177).



Figura 177. Representación de la reproducción de un orden lineal en horizontal a otro en vertical

A lo largo de todas estas actividades debemos potenciar la verbalización por parte del alumnado de las posiciones que ocupan los diferentes puntos que intervienen en ellas, utilizando el vocabulario asociado: «primero», «último», «anterior», «posterior», «entre», «al lado», «a la izquierda»...

Conjuntamente con el avance en el conocimiento del orden lineal directo y también hacia la mitad del 2.º ciclo tenemos que iniciar el orden cíclico, trabajando análogamente con niños y niñas y objetos del entorno. La dificultad es ahora mayor dado que los puntos se sitúan sobre líneas cerradas y, por lo tanto, no hay principio ni final preestablecido. Para reproducir en estos casos el orden espacial hay que establecer cuál será el primer elemento y en qué sentido nos desplazaremos por la línea cerrada para determinar el orden a reproducir. En un principio el trabajo consistirá en trasladar las posiciones de una línea cerrada a otra con la misma forma y manteniendo las distancias entre los puntos. Como en el caso del orden lineal, debemos encontrar ejemplos que les puedan resultar cercanos, pudiendo ser válidos los mismos que hemos comentado antes, modificando el tipo de línea en la que se sitúan los puntos. Por ejemplo, los niños y las niñas de la figura 176, en lugar de en fila pueden estar en corro.

Más adelante, ampliaremos el estudio del orden cíclico combinando líneas cerradas de diferentes tipos (circunferencias, elipses, ovoidales, poligonales...) y variando las distancias entre los puntos originales y entre sus imágenes. También dedicaremos atención a las representaciones gráficas de este tipo de orden espacial, pidiéndoles, por ejemplo que pinten estrellas para decorar el aula siguiendo un modelo que les damos (figura 178).

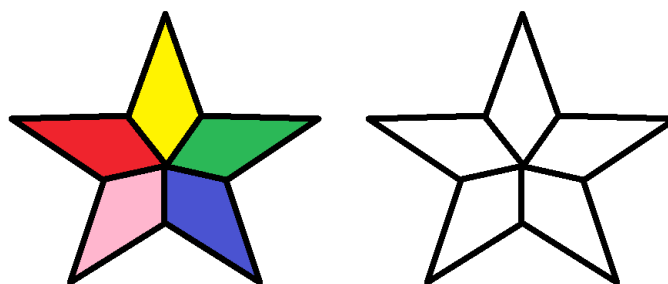


Figura 178. Representación de estrellas para reproducir un orden cíclico

En el último curso de la etapa completaremos todo el trabajo anterior combinando el orden lineal directo y el orden cíclico, situando los puntos de los que partimos sobre líneas abiertas y los puntos imagen sobre líneas cerradas o al revés (por ejemplo, copiar un collar cerrado ensartando bolas en un hilo abierto).

Para finalizar, se podrá introducir el orden lineal inverso, pasando de puntos situados sobre líneas abiertas a otros también sobre líneas abiertas y en la misma posición, manteniendo invariantes las distancias entre los puntos originales y entre sus imágenes, pero invirtiendo el orden de colocación de aquellos. Es conveniente realizar las actividades empezando por un número impar de puntos de partida, para pasar más adelante a un número par de estos. En el primer caso, el punto que ocupa el lugar central no cambia de posición al invertir el orden y puede servir de ayuda para encontrar las posiciones de las otras imágenes, mientras que no ocurre así en el otro caso, donde todas las imágenes cambian de posición respecto de las iniciales.

Además de los ejemplos mencionados anteriormente y para ayudar a contextualizar este trabajo en situaciones reales, podemos aprovechar las actividades relacionadas con la capacidad anterior, haciendo recorridos tanto cíclicos como no cíclicos que tengan que reproducir en algún plano, marcando el orden de determinados puntos del recorrido, y también las relacionadas con la realización de cenefas que veremos en la capacidad 16 de este tema.

6. Iniciar una primera aproximación intuitiva a las nociones de punto, línea, superficie y espacio. Reconocer líneas, superficies y volúmenes en el espacio que nos rodea

Intentaremos ahora acercar al alumnado a los conceptos geométricos de punto, línea, superficie y espacio a partir del entorno y de los objetos que les rodean. Evidentemente, en esta etapa educativa no podremos llegar a la abstracción de los mencionados conceptos, solo construiremos aproximaciones reales a los mismos.

En este sentido, es importante que la docente tenga clara la diferencia entre sus dimensiones. Hablar de dimensiones es una abstracción que no entra en el aula de infantil, pero conocerlas nos ayudará a medir la dificultad que presentan. Matemáticamente un punto tiene dimensión 0, una línea tiene dimensión 1, una superficie 2 y el espacio, dimensión 3.

Nos proponemos que los niños y las niñas puedan ir formándose su propia imagen mental de las nociones geométricas estudiadas mediante actividades de contacto con objetos reales y de reflexión sobre sus experiencias, que se realizarán en cualquier momento relacionadas con otras situaciones y actividades del aula. También introduciremos el vocabulario asociado con la intención de que el alumnado pueda incorporarlo progresivamente al suyo y trabajaremos con representaciones gráficas de los conceptos estudiados, teniendo en cuenta las limitaciones de los niños y niñas de estas edades.

Esta capacidad se desarrolla a lo largo de todo el 2.º ciclo de educación infantil y el conocimiento de los conceptos que la integran se amplía y complementa con la ayuda del trabajo que se realiza en las restantes capacidades del tema. Como la percepción del alumnado es global y el espacio donde vivimos es tridimensional, empezaremos por la aproximación a este, continuando después con las superficies

y las líneas hasta llegar en último lugar al punto como el concepto geométrico más simple y que constituye el elemento que compone a todos los demás.

La primera aproximación al espacio es reconocerlo como el aire que nos rodea, en el cual estamos nosotros y todas las otras personas y cosas. La segunda aproximación irá en relación con la idea de espacio ocupado por un objeto como una porción del espacio anterior. Así se construye la distinción entre espacio geométrico «completo» que habitualmente es el espacio general, y espacio geométrico «particular» ocupado por un cuerpo que se cuantifica calculando la medida de su volumen.

El alumnado deberá observar también que su contacto con el espacio general es completo, que puede moverse dentro de él y colocar o desplazar por él todo aquello que le rodea.

En estos niveles no se trabajará de manera específica la representación gráfica del espacio ni de los cuerpos, por la imposibilidad de los niños y las niñas de trasladar a las dos dimensiones del plano las tres dimensiones del espacio.

En el caso de las superficies el alumnado tomará contacto con paredes, mesas, el suelo, páginas de libros, teles de vestidos, cajas, botes... Nuevamente se está construyendo una idea: que la superficie es aquello que puedo recorrer con la mano extendida, con la planta del pie, donde puedo apoyarme yo y apoyar otros objetos y sobre la cual se pueden dibujar puntos, líneas, objetos, cosas...

Relacionado con diferentes situaciones de aula (hacer una cabaña, un disfraz, un mural...) trabajaremos la construcción de varias superficies con papel, tela, cartón, etc., y haremos tareas de recubrimiento de algunas superficies con pintura, bolitas de papel, etc.

Posteriormente, intentaremos realizar un trabajo gráfico, pero les resulta complicado también plasmar gráficamente las superficies salvo cuando estas son planas (se necesita perspectiva en muchos casos). Por lo tanto, dejaremos que dibujen lo que puedan sin esperar corrección en sus producciones.

Deberemos prestar especial atención a la distinción entre la superficie de un cuerpo tridimensional y el espacio ocupado por este objeto. La primera es la que se toca, la parte del objeto que se ve y se puede recorrer con la mano, la frontera del cuerpo. El espacio que ocupa el objeto es el espacio geométrico particular que solo contiene este cuerpo.

Podemos aproximarnos a la idea de línea a través del recorrido de caminos marcados de diferentes maneras, de la formación de filas con los niños y las niñas, de la realización de series, del ensartado de bolitas... También mediante actividades con cuerdas, hilos, bordes de una hoja, aristas de algunos objetos, etc., que permitan al alumnado ir construyendo el concepto de línea. De este modo los niños y las niñas observarán que su contacto con las líneas es dinámico, que pueden recorrerlas con la punta del dedo o de un lápiz y que sobre ellas no se puede apoyar nada y solo se pueden dibujar puntos.

Relacionado con situaciones habituales en el aula (poner las mesas en fila, marcar un camino en el suelo, dibujar una casa, rodear unos objetos...) se trabajará también la construcción de líneas y las actividades gráficas de dibujar, pintar y repasar líneas.

Por último, identificaremos el punto con el extremo del borde de una hoja, de una caja...; con la punta de un lápiz, de un cuchillo, de unas tijeras...; con la marca de un lápiz en un papel, etc. El alumnado debe observar que su contacto con el punto es mínimo, estático, y que sobre un punto no se puede apoyar ni dibujar nada.

Es importante que los niños y las niñas reconozcan estos conceptos en objetos de la vida real. Por ejemplo, a partir de una caja cualquiera, tendrán que identificar puntos, líneas, superficies y el espacio que ocupa (figura 179).

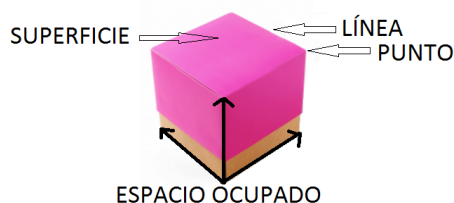


Figura 179. Representación de una caja con indicaciones del espacio que ocupa y de un punto, una línea, y la superficie de una de sus caras

7. Distinguir líneas y superficies abiertas y cerradas. Construir líneas y superficies abiertas y cerradas y modificar su forma y longitud sin alterar su propiedad

De ahora en adelante se completará la capacidad anterior con el estudio particular de diferentes tipos de líneas y superficies y, a partir de ellas, de los conceptos que se derivan: figuras planas y cuerpos geométricos.

En el 1.º curso del ciclo y relacionado con situaciones de juegos, de actividades físicas u otros trabajos de aula, el alumnado realizará desplazamientos «desde el principio hasta el final» sobre líneas señaladas en el suelo con palos, cuerdas, rayas, etc., observando lo que ocurre en función de la existencia o inexistencia de extremos en ellas. De acuerdo con estas experiencias, si hay extremos la línea será abierta y, en caso contrario, cerrada (figura 180). Es importante introducir la verbalización y usar el vocabulario adecuado en cada situación, en principio por parte del docente y, poco a poco, también por los niños y las niñas.

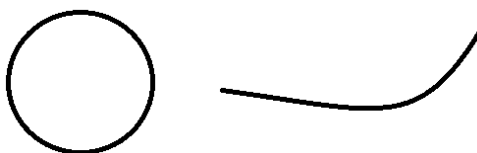


Figura 180. Representación de una línea cerrada (izquierda) y de una abierta (derecha)

Más adelante, y para comprobar si el alumnado va elaborando adecuadamente su propia imagen mental de los conceptos estudiados, se trabajará la construcción y la

representación gráfica de líneas abiertas y cerradas, ofreciéndoles al principio un modelo de referencia si lo necesitan y sin ningún modelo después.

Hacia la mitad del ciclo hay que trabajar también las superficies abiertas y cerradas, a partir del contacto con ellas (telas, papeles, cartulinas, cartones, cajas..., que se recorren con las manos) y de observar que unas tienen extremos que indican claramente dónde empieza y dónde acaba la superficie, las abiertas, y otras no, las cerradas (figura 181). Extenderemos el uso del vocabulario utilizado para las líneas aplicándolo también a las superficies. Es importante que los niños y las niñas observen que las superficies abiertas nos dejan recorrer todo el espacio geométrico sin ningún problema, mientras que las cerradas no, siendo necesario atravesarlas para poder hacerlo (para pasar de una región a la otra hay que romperlas).



Figura 181. Representación de una superficie cerrada (izquierda) y de una abierta (derecha)

De manera análoga al caso de las líneas y relacionado con algunas situaciones de aula, se trabajará la construcción de superficies abiertas y cerradas, ofreciéndoles al principio un modelo de referencia si lo necesitan y sin ningún modelo después. Como ya hemos comentado en la capacidad anterior, existen muchas dificultades para poder trabajar adecuadamente la representación gráfica de superficies, por lo tanto, continuaremos dejándoles dibujar sin esperar fidelidad y corrección total en sus producciones.

Por último, y como complemento de todo lo que ya hemos comentado, habremos de realizar también actividades de construcción de líneas y superficies abiertas y cerradas, en las que tenga que modificarse la forma o longitud de otras que se dan inicialmente, pero conservando su carácter de abiertas o cerradas (por ejemplo, cuerda más larga para anudar un paquete, collar más corto, sombrero de hada más pequeño, cartulina más grande...).

Los conceptos estudiados en esta capacidad se amplían y complementan con el trabajo de la capacidad siguiente.

8. Experimentar las nociones «dentro» y «fuera» en relación con los términos «abierto» y «cerrado». Adquirir las nociones de frontera y región

Para desarrollar esta capacidad se hace necesario hablar del concepto de frontera como *un conjunto de puntos que separa una línea, una superficie o el espacio en dos regiones claramente diferenciadas y que es necesario atravesar para ir de una región a otra.*

La definición anterior va irremediabilmente unida al concepto geométrico respecto del que consideramos la frontera, por eso, si hablamos del espacio, que tiene dimensión 3, lo que definirá la frontera será una superficie cerrada, que es de dimensión 2 (la de una caja tapada, la de un armario cerrado, etc.). En el caso de las superficies, la frontera vendrá determinada por una línea cerrada, que tiene dimensión 1 (la circunferencia del círculo central de un campo de fútbol, un diagrama de Venn, etc.). Podemos encontrar superficies en las cuales algunas líneas cerradas no son frontera (por ejemplo, en la superficie de un flotador, como el que se muestra en la figura 182, cada una de las líneas cerradas representadas no forma frontera por sí misma), pero no son objeto de estudio en esta etapa.

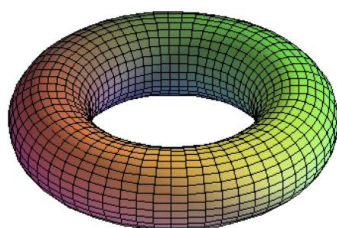


Figura 182. Representación de una superficie toroidal

Por último, cuando se trata de líneas (figura 183), la frontera vendrá determinada por un punto, que es de dimensión 0, en el caso de las abiertas y dos puntos no consecutivos en el de las cerradas (por ejemplo, establecer dos tramos en las bolas de un collar abierto o cerrado, etc.).

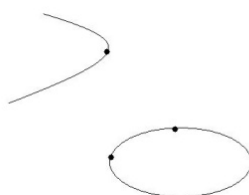


Figura 183. Representación de fronteras en líneas

La idea de frontera que se va construyendo en el alumnado es la de que no se puede pasar de una zona a la otra si no se atraviesa la frontera. La importancia de este concepto está en su utilidad para establecer los límites de las figuras planas y de los cuerpos geométricos y, por lo tanto, para reconocerlos, definirlos, estudiarlos y caracterizarlos.

Empezaremos desde el principio del 2.º ciclo y, a partir del movimiento y de las posiciones de los niños y las niñas, introduciremos las nociones «dentro» y «fuera» respecto de una superficie cerrada, que será una frontera en el espacio (caja, armario, aula...), para trabajarlas a continuación con objetos y con otras fronteras (botella, bolsa, estuche...).

En todos los casos se verbalizarán las posiciones que se trabajan utilizando el vocabulario asociado, en primer lugar por parte del docente y después también por el alumnado. Debemos intentar evitar algunas confusiones bastante habituales en el

lenguaje: «dentro» no es igual a «en» (el agua se encuentra «en» el vaso, no «dentro» del vaso, que es una superficie abierta; pero «dentro» de la botella tapada, no «en» la botella tapada, que es una superficie cerrada). Es decir, solo se puede hablar de dentro y fuera cuando existe realmente una frontera. En cualquier otro caso estas palabras no son correctas.

Además del trabajo con fronteras en el espacio que acabamos de comentar, prestaremos atención también, desde el principio del ciclo, a las nociones dentro y fuera respecto de una línea cerrada, que ahora será frontera en una superficie: pisar dentro/fuera de un aro, apoyar una pelota dentro/fuera de la línea cerrada de un campo de deporte, etc. En estos casos hemos de procurar no utilizar expresiones incorrectas: por ejemplo, pedir a un niño o niña que se ponga o que coloque un objeto dentro de una línea cerrada; es imposible que cualquier cosa de 3 dimensiones esté dentro de otra de 2. Tendremos que decir «pisa dentro del aro» o «apoya el libro dentro de la línea». Es conveniente trabajar primero las fronteras en superficies planas y después en otras que no lo sean (una pelota, una cabaña...) para comprobar que siempre que necesitamos una frontera en una superficie tenemos que trabajar con una línea cerrada.

Posteriormente al trabajo manipulativo se realizará uno gráfico con las fronteras en una superficie: colorear dentro/fuera de la silueta de un dibujo, colorear dentro/fuera del contorno de las figuras geométricas planas, etc.

Hacia la mitad del ciclo ampliaremos el vocabulario inicial, introduciendo las palabras zona o región (para referirse a cada una de las partes en que se divide el espacio o una superficie) y frontera (como el elemento que separa dos zonas o regiones). Como en otras ocasiones, será el docente quien utilizará el vocabulario en un primer momento para pasar a usarlo el alumnado más adelante.

Para ampliar el conocimiento de todos estos conceptos, se debe trabajar también por parte de los niños y las niñas la construcción de fronteras tanto en el espacio como en una superficie (utilizando materiales como papel, telas, cartulinas, aros, palos, cuerdas...) y, en este último caso, tanto en la realidad como en representaciones gráficas (rodear los elementos de un conjunto con un diagrama, por ejemplo).

Trabajaremos también el reconocimiento de puntos/elementos que se encuentran en la misma o en diferente zona respecto de una determinada frontera, en un primer momento en situaciones reales y, posteriormente, de manera gráfica. Por ejemplo, si tenemos niños y niñas dentro y fuera del aula haciendo diferentes actividades, hará falta que a unos les pongamos al cuello un pañuelo de color rojo y a los otros de color verde, para diferenciarlos. Si el trabajo es gráfico, señalarán de diferente manera los objetos que están representados dentro o fuera de la frontera. Por ejemplo, pintarán de diferente color las vacas que hay dentro de una cerca y las que están fuera.

Hacia el final del ciclo, ampliaremos este trabajo con situaciones en las cuales el alumnado tenga que utilizar más de una frontera en el espacio o en una superficie. Por ejemplo, en el caso del espacio, podemos estar dentro del aula pero fuera del armario o poner unos zapatos fuera del armario pero dentro de su caja. Si nos situamos sobre una superficie, se puede pisar dentro de la línea del campo de baloncesto

pero fuera del área de tiro (figura 184), dibujar un pájaro fuera de la casa pero dentro del recuadro, o dentro de un diagrama de conjuntos pero fuera de otro. Es importante que observen las diferentes posiciones respecto de las fronteras que se consideran y que sepan verbalizarlas correctamente.

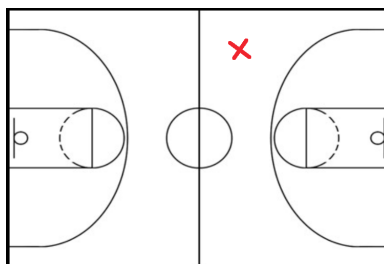


Figura 184. Representación de la posición de un jugador dentro del campo de baloncesto pero fuera del área de tiro

También en el último curso de la etapa y, como siempre, relacionado con situaciones reales, se introducirá la frontera en la línea. Este concepto resulta más complicado que los anteriores. Buscaremos situaciones en las cuales se pueda ver claramente que, para tener definida una frontera en una línea, necesitamos un punto si la línea es abierta y dos si es cerrada. Podemos utilizar filas o corros formados con los propios niños y niñas y observar que, para seleccionar unos cuantos de ellos solo necesitamos un punto de corte en la fila en el primer caso y dos en el corro, en el segundo.

9. Distinguir, construir y representar líneas rectas y curvas. Distinguir la horizontalidad o verticalidad de la línea recta

Con estos nuevos conceptos que nos ayudan a caracterizar las líneas, con propiedades diferentes de las de ser abierta y cerrada, entramos en el campo de la geometría proyectiva.

Cuando el alumnado accede al 2.º ciclo de educación infantil seguramente ha tenido ya contacto con líneas rectas y curvas en sus experiencias anteriores a la escuela en la realidad y con las otras personas. Habrá manipulado objetos de bordes rectos y/o curvos (cajas, botes, hojas, botellas...), habrá escuchado a los mayores decir de algo que es recto o que no, etc.

En estos momentos, todavía no podremos trabajar de manera específica en el aula las características particulares de las líneas rectas y curvas, ni sus diferencias esenciales. Solo pondremos al alcance de los niños y las niñas, para que los puedan manipular, objetos delimitados tanto por líneas rectas como por curvas y observaremos los trazos que hacen en sus producciones gráficas, para incidir en ellas potenciando el uso equilibrado de los dos tipos de líneas (lluvia, olas, caminos...). El docente irá utilizando el vocabulario asociado sin esperar necesariamente que lo haga el alumnado.

Cuando esté un poco avanzado el ciclo, desarrollaremos actividades que nos aproximen a las ideas de línea recta y curva a partir de la realización de filas de niños y

niñas, mesas u otros objetos y de la observación y reflexión sobre las mismas. Así descubrirán que, si miran la fila desde frente a ella y coincidiendo la altura de los ojos con el centro del primer elemento, algunas veces solo pueden ver este primer elemento, mientras que en otras ocasiones pueden ver varios elementos. La verbalización de estas situaciones nos hará asociar las mencionadas filas con las ideas de línea recta y línea curva, respectivamente, y a utilizar de manera habitual, por parte de todos, el vocabulario correspondiente para denominarlas.

A continuación se presentan unas imágenes que pretenden escenificar las situaciones anteriores, a partir de dos filas de alumnos y alumnas (figura 185).

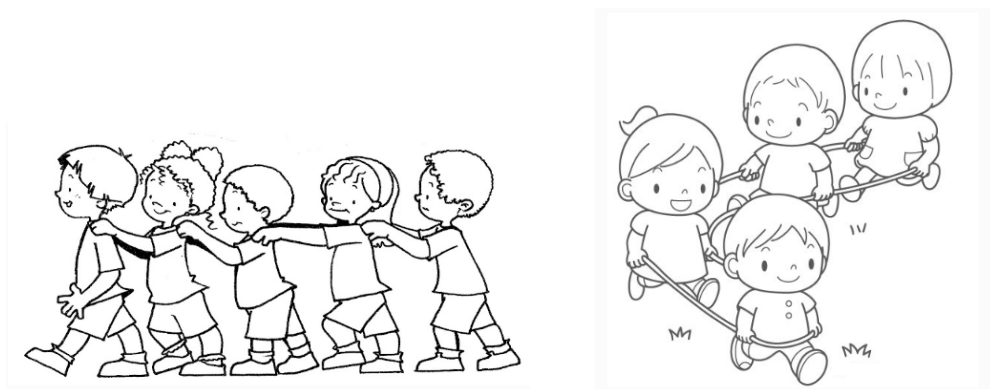


Figura 185. Representación de filas rectas y curvas de niños y niñas

Nos planteamos qué se vería desde arriba y lo representamos simbólicamente (figura 186).

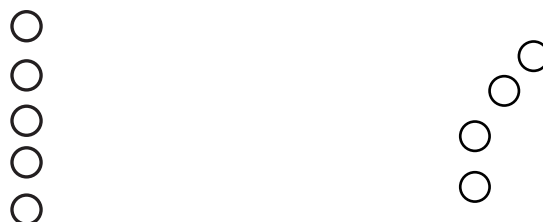


Figura 186. Representación de la vista superior de filas rectas y curvas

Por lo tanto, desde una posición situada delante de la fila, esquemáticamente, veríamos lo que se representa en la figura 187.

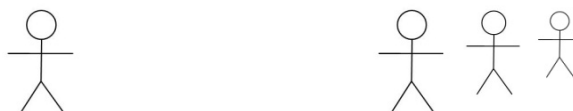


Figura 187. Representación de la vista frontal de filas rectas y curvas

Como complemento de estas actividades, el alumnado realizará otras en las que andarán por encima de líneas rectas y curvas, o paralelamente a ellas, poniendo el talón de un pie junto a la punta del otro, observando que por un camino recto se

puede avanzar manteniendo los pies siempre en la misma dirección mientras que, en el caso de la línea curva, es necesario cambiarla girando los pies para poder seguir adelante (figura 188).



Figura 188. Representación con huellas de un recorrido recto (izquierda) y de uno curvo (derecha)

También es conveniente trabajar la construcción de líneas rectas y curvas con diferentes materiales (cuerdas, hilos, palos...) y su representación gráfica, a partir de un modelo si es necesario en un primer momento y sin modelo más adelante. Además de otras situaciones, es importante relacionar esta tarea con actividades reales y gráficas de caminos y laberintos como las mencionadas en la capacidad 4 de este tema. Observaremos siempre que las aproximaciones a las líneas rectas y curvas que construyen o dibujan sean correctas y las denominaremos adecuadamente reforzando el vocabulario asociado.

En la segunda parte del ciclo y una vez diferenciadas las líneas rectas y curvas, prestaremos atención en particular a las primeras, para estudiar las diferentes posiciones en las cuales podemos encontrar una línea recta. Introduciremos estos conceptos asociándolos con las posiciones corporales del alumnado. Así, un niño «de pie» se relacionará con una línea vertical y una niña «tumbada» con una horizontal. Se estudiarán también estas dos posiciones de la línea recta a partir de la horizontalidad o verticalidad de algunos elementos del entorno: tren, horizonte, farola, árbol, etc., y se completarán con la idea de línea oblicua, que corresponde a cualquier posición de una línea recta que no sea vertical ni horizontal (por ejemplo, se puede aprovechar la observación de las posiciones que va ocupando un lápiz desde que se encuentra de pie hasta que está totalmente apoyado en la mesa, como se puede ver en la figura 189).

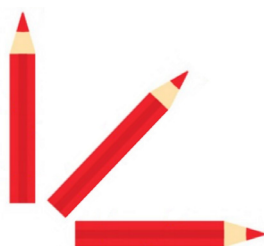


Figura 189. Representación de un lápiz en posiciones vertical, oblicua y horizontal

Para denominar estas posiciones de la recta introduciremos el vocabulario correspondiente, que pasará a formar parte con su uso del que utilizan los niños y las niñas de manera natural. También tendremos que trabajar el reconocimiento

de líneas verticales, horizontales y oblicuas en objetos cotidianos: cajas, libros, juguetes, mesas, etc., y la construcción de estas con diferentes materiales: hilos, cuerdas, piezas para montar trenes o torres, etc.

Para llevar al papel estos tipos de líneas rectas podemos reproducir en hojas grandes, que estén enganchadas a una pared, las siluetas de algunos alumnos y alumnas de pie y tumbados, y también las diferentes posiciones del lápiz mencionado antes. Más adelante serán ellos y ellas quienes las repasen y representen, con modelo si es necesario.

Hacia el final de la etapa, completaremos estos conceptos asociando la posición vertical con la dirección que va «de arriba abajo» y horizontal con la que va «de un lado al otro».

También en el último curso es conveniente realizar actividades que les permitan comprobar que la distancia más corta entre dos puntos es la que se recorre en línea recta. Se puede experimentar con caminos rectos y curvos señalados entre dos puntos, que recorrerá el alumnado con un ritmo marcado por el maestro o la maestra y colocando los pies en línea continua para observar que llega primero el niño o niña que anda por el camino recto.

10. Experimentar la intersección de líneas. Reconocer nudos y redes

En esta capacidad ampliamos el estudio de las líneas con la consideración de varias a la vez, en lugar de trabajarlas de manera aislada como hemos hecho hasta ahora.

En este contexto, se denomina nudo a *cualquier punto que pertenece a más de una línea, en el caso que sea simple, o a la misma línea si no lo es* (figura 190). Inevitablemente hay un concepto asociado, el de red que *es un conjunto de líneas conectadas por varios nudos*.

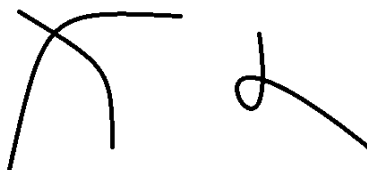


Figura 190. Representación de nudos determinados por dos líneas simples (izquierda) y por una no simple (derecha)

En la segunda mitad del ciclo haremos un reconocimiento de nudos a partir de los desplazamientos del alumnado por diferentes caminos que tengan puntos en común: intersección de pasillos, de calles, caminos o carreteras, y trabajaremos también la construcción de itinerarios con nudos y la representación gráfica de caminos que los contengan y que, por lo tanto, forman redes.

Por último, realizaremos actividades gráficas de representación de nudos y redes, que pueden ser reflejo de alguna situación que hayan vivido en la realidad o ser un recorrido inventado directamente a partir de un plano, mapa, etc. (figura 191).

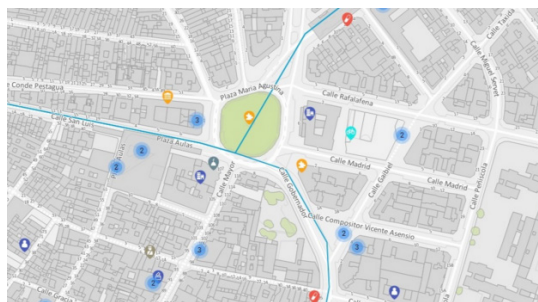


Figura 191. Representación de un plano de la ciudad de Castelló con un recorrido señalado

El docente utilizará el vocabulario específico asociado a estos conceptos, pero no se trabaja con la intención de que lo usen los niños y las niñas.

Relacionado con la presencia de nudos entre las líneas, se puede desarrollar el aprendizaje por parte del alumnado de la tarea de «atarse» los cordones de los zapatos.

Nota: Cuando entre dos líneas rectas situadas en el mismo plano no existe ningún punto de contacto, nos encontramos en presencia de líneas paralelas. El concepto de paralelismo resulta complicado para los niños y las niñas, puesto que está asociado al concepto de infinito y exige siempre que piensen en la prolongación de las líneas que están observando y aventuren si se cortarán o no más allá de lo que se ve. Por estas razones el paralelismo no se estudia en educación infantil, donde las líneas que se trabajan siempre se encuentran.

11. Distinguir y construir superficies planas y curvas

Empezaremos este trabajo en el último curso de la etapa mediante actividades de contacto directo con diferentes superficies planas y curvas, observando las diferentes sensaciones que los niños y las niñas perciben al tocar, sentarse, apoyarse o poner otros objetos encima de una caja grande, del suelo, de una pelota, de un tubo cilíndrico, etc. Estos contactos y observaciones generan ideas intuitivas de lo que son superficies planas y superficies curvas, que se complementan con la introducción del vocabulario adecuado para denominarlas.

Se trabajará también el reconocimiento de superficies planas y curvas en objetos del entorno y la construcción de estos dos tipos de superficies con telas, papeles, cartulinas, etc.

Como hemos comentado en algunas capacidades anteriores, el alumnado de esta etapa no puede desarrollar adecuadamente la representación gráfica de superficies, por lo que continuaremos dejándoles dibujar sin esperar fidelidad y corrección en sus producciones.

Solo al final de la etapa se puede intentar que algunos lleguen a captar la diferencia geométrica esencial entre las superficies planas y curvas, dándose cuenta de que

sobre las planas se pueden dibujar líneas rectas en cualquier dirección, mientras que en el caso de las curvas hay direcciones en las cuales no se puede hacer.

12. Reconocer, nombrar, construir y representar las figuras geométricas planas: círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo

Las cuestiones relacionadas con las formas geométricas que vamos a trabajar en esta capacidad, nos mantienen dentro de los conceptos que forman parte de la geometría de las proyecciones, pero ahora referidos a las transformaciones geométricas llamadas semejanzas.

Iniciaremos el conocimiento de las figuras planas introduciendo el círculo al principio del 2.º ciclo de educación infantil. El alumnado observará y manipulará objetos reales cuya característica sea que rueden, experimentando con ellos esta posibilidad de movimiento (monedas, galletas, botes, pelotas, etc.). A continuación les haremos tocarlos para que reconozcan la superficie plana y de borde redondeado que tienen algunos de ellos y trasladarán su contorno, por ejemplo, al suelo o a un papel planos, rodeándola con un lápiz y observando que siempre queda marcada una línea cerrada de la misma forma, una circunferencia. Como las figuras que trabajamos son superficies y no líneas, tendrán que colorear la zona limitada por la circunferencia e introduciremos el concepto de círculo como la porción de plano que han coloreado (figura 192), así como el nombre de esta, que utilizaremos de manera habitual.

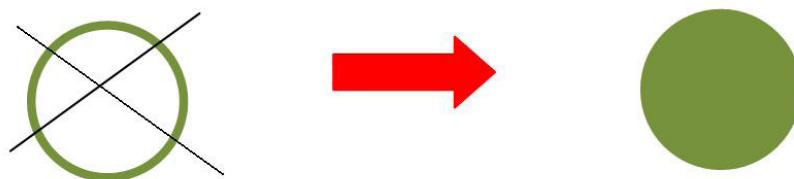


Figura 192. Representación de una circunferencia y de un círculo

Después de conocer el círculo, observarán y manipularán objetos que no rueden (porciones y cajas de queso, cajas de algunos chocolates, cajas de jarabe, gomas de borrar, dados...) para descubrir en ellos la presencia de «esquinas o puntas» y de bordes rectos en lugar de curvos. Con el paso al papel de los contornos de las caras de algunos de estos objetos y después de colorear su interior, estableceremos diferencias entre las figuras obtenidas (tres o cuatro «rayas», tres o cuatro «puntas») e introduciremos en el vocabulario habitual del aula los nombres *triángulo* y *cuadrado* para referirnos respectivamente a ellas (no utilizaremos las palabras *lado* y *vértice*).

La observación, manipulación y experimentación con materiales didácticos específicos por parte de los niños y las niñas les permitirá visualizar adecuadamente las figuras que hemos introducido y estudiar sus semejanzas y diferencias (véase figura 193). Además, insistiremos en el reconocimiento de círculos, triángulos y cuadrados en objetos cotidianos reales. Tanto en un caso como en el otro, y con el fin de enriquecer el concepto de triángulo, pondremos al alcance del alumnado

triángulos de diferentes tipos, evitando la presencia casi permanente de los equiláteros y la ausencia, muchas veces, de los isósceles y de los escalenos.



Figura 193. Figuras geométricas planas (Geometric Shapes, fabricado por NES Arnold Ltd.)

Hacia la mitad del ciclo podemos ampliar el trabajo con estas figuras desarrollando actividades para construirlas (por ejemplo, con hilos, palos, cuerdas, palillos, gomas elásticas, listones, etc.) relacionadas con situaciones de aula que las necesiten (juegos, murales, exposiciones de trabajos, etc.). En la realización de estas actividades debe quedar claro que la figura plana es el trozo de papel (de superficie plana) que está limitado por el contorno y no el contorno solo, lo que favoreceremos recortando las figuras (figura 194).

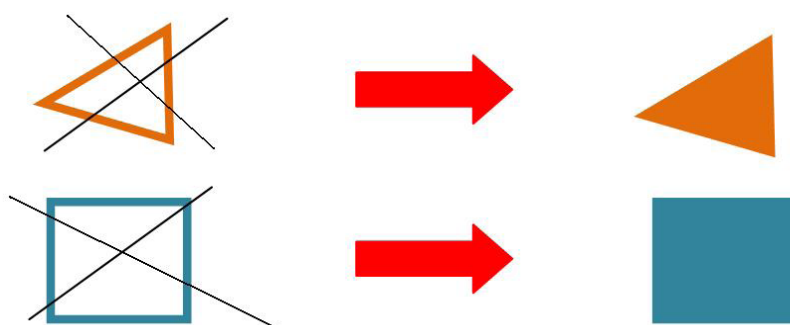


Figura 194. Representación del contorno de un triángulo y un cuadrado y de las figuras correspondientes

También asociado con algunas situaciones de aula, trabajaremos la representación gráfica de las figuras por parte de los niños y las niñas teniendo en cuenta sus limitaciones a la hora de hacerlo. En principio, aceptaremos como círculo cualquier representación de una superficie limitada por una línea curva cerrada que ellos reconozcan así. Para representar los vértices de las otras figuras evitando que les puedan salir redondeados, hay que orientarlos aconsejándoles que hagan un segmento recto para cada lado, levantando el lápiz del papel cuando lleguen al extremo y tengan que cambiar de dirección para continuar con el dibujo. Es decir, hay que hacer el contorno del triángulo (cuadrado) en tres (cuatro) trazos separando al acabar cada uno de ellos el lápiz del papel.

Aprovecharemos todas las actividades anteriores para insistir en las semejanzas y diferencias que hay entre las figuras trabajadas: el círculo no tiene vértice ni líneas rectas, el triángulo y el cuadrado sí tienen, pero el primero solo tiene tres puntas y tres rayas, mientras que el segundo tiene cuatro de cada.

El rectángulo se introducirá de manera similar a las figuras anteriores, manipulando objetos que lo contengan en su frontera (por ejemplo, las caras laterales de una caja, de un frigorífico...) trasladando al plano el contorno de alguna de las caras correspondientes y coloreando la zona interior. En un principio el alumnado puede confundirlo con el cuadrado ya conocido. Para evitarlo, y apoyándonos en la clasificación excluyente de los cuadriláteros, habrá que marcar claramente la diferencia: el cuadrado tiene los cuatro lados de la misma longitud y el rectángulo tiene dos iguales que son más largos que los otros dos, que también son iguales. Esta referencia a diferentes longitudes, nos introduce en la geometría métrica.

Al rellenar la superficie interior de los contornos representados, les recordaremos que, de manera análoga a las otras figuras planas, el rectángulo es la porción del plano delimitada por el contorno y no el contorno solo. Para denominar estas nuevas figuras introduciremos la palabra rectángulo que vendrá a completar el vocabulario correspondiente a esta capacidad.

Para favorecer el conocimiento de esta nueva figura se realizarán actividades de manipulación de materiales didácticos que contengan rectángulos y de reconocimiento de los mismos en objetos reales, aprovechándolas para insistir en las semejanzas y las diferencias entre las figuras anteriores y esta.

También tendrán que construir rectángulos con diferentes materiales y representarlos cuando sea necesario para desarrollar alguna tarea del aula, sin olvidar la necesidad de rellenar el interior del contorno de la figura y dejando muy claras las diferencias con los cuadrados.

Con el trabajo de esta capacidad hemos dado los primeros pasos hacia el conocimiento más amplio y profundo de las figuras planas que se desarrollará en educación primaria.

13. Reconocer y nombrar los cuerpos geométricos: cubo y esfera

En la capacidad 6 hemos hablado del espacio geométrico «completo» que habitualmente es el espacio general y del espacio geométrico «particular», el ocupado por un cuerpo. Dedicaremos atención ahora a los cuerpos más sencillos como complemento del trabajo realizado en la capacidad anterior con las figuras planas.

A lo largo de todo el ciclo, el alumnado ha tomado contacto con muchos objetos de su entorno pero sin prestar atención a ellos como cuerpos geométricos.

En el último curso de la etapa, manipularán y observarán objetos/cuerpos reales considerándolos como elementos que ocupan una parte del espacio (pelotas, naranjas, dados, botes...) y diferenciando unos de los otros en función de la existencia de superficies planas o curvas en las fronteras que los delimitan. De manera análoga a las figuras planas, insistiremos en que el cuerpo es el espacio que se encuentra limitado por la frontera y no solo la superficie exterior que podemos tocar con las manos.

Prestaremos especial atención a los cubos y las esferas, introduciendo sus nombres y utilizándolos correctamente cuando sea necesario. Es importante manipular materiales didácticos específicos que les permitan visualizar correctamente los cuerpos trabajados (figura 195), además de construirlos con materiales compactos (plastilina, barro, por ejemplo) y observar su interior cortándolos para descubrir que están llenos y no vacíos por dentro. Si se trabaja la construcción de estos cuerpos con materiales no compactos como tubos rígidos o flexibles, alambre, etc., es necesario insistir también en la idea de cuerpo como toda la porción de espacio limitada por la frontera.



Figura 195. Figuras Geométricas en el entorno (fabricado por Akros)

14. Componer y descomponer figuras y cuerpos geométricos

Hacia la mitad del 2.º ciclo de educación infantil, ampliaremos el conocimiento de las figuras planas y de los cuerpos geométricos con actividades de composición y descomposición de estos, que en general estarán relacionadas con situaciones de aula en las cuales sea necesario hacerlas (por ejemplo, montar una figura a partir de sus partes, completar un mosaico, un dibujo, etc.).

Podemos empezar componiendo y descomponiendo cualquiera de las figuras no circulares a partir de diferentes tipos de triángulos y continuar combinando todas estas figuras para obtener también alguna de ellas. Es necesario que observen cómo se combinan unas figuras para formar otras y qué condiciones deben cumplir las figuras iniciales para poder obtener una determinada. Por ejemplo, cuándo se puede componer o descomponer un rectángulo con dos cuadrados, un cuadrado con dos triángulos iguales, o un rectángulo con dos cuadrados o dos triángulos, etc. (figura 196).

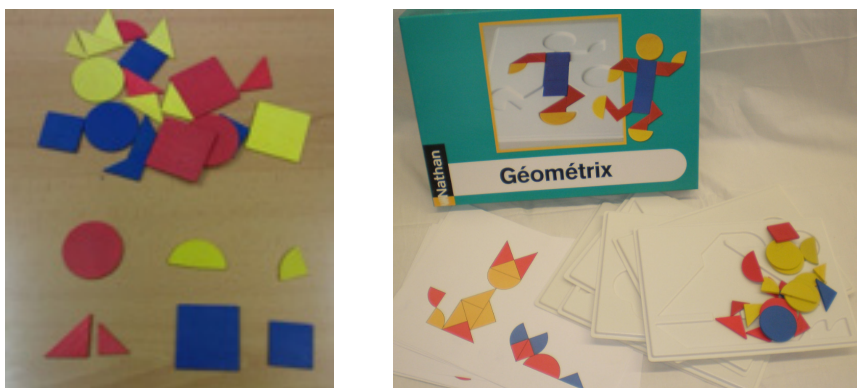


Figura 196. Géométrix (fabricado por Nathan)

Con el círculo haremos un trabajo parecido, componiéndolo y descomponiéndolo a partir de semicírculos, cuadrantes de círculo, sectores o segmentos circulares y reflexionando también sobre las condiciones de las figuras iniciales para poder componer un círculo.

Todas las actividades comentadas para las figuras planas se desarrollarán al principio utilizando materiales formados por piezas que puedan acoplarse y, más adelante, mediante representaciones gráficas.

Por último, y hacia el final de la etapa, se pueden componer y descomponer también cubos y esferas a partir de diferentes fragmentos suyos (ortodros, semiesferas...). Evidentemente, este trabajo se realizará solo de manera manipulativa y con menos profundidad que el correspondiente a las figuras planas.

15. Iniciar la idea de simetría en el propio cuerpo, en figuras planas y en cuerpos cualesquiera

Esta capacidad complementa el trabajo referente a las posiciones espaciales «a la derecha», «a la izquierda» que hemos visto en las primeras capacidades del tema, y pretende que los niños y las niñas puedan observar y reflexionar alrededor de algunas figuras o cuerpos que presentan dos lados que se desarrollan igual en referencia a un determinado eje o plano.

Se empieza a trabajar en el último curso, observando el alumnado su propio cuerpo y llegando a visualizar un eje o un plano a partir del cual el cuerpo se desarrolla en dos partes iguales. Esto mismo hay que reconocerlo en algunos objetos de la realidad (frutas, construcciones...) y en otros elementos de la propia aula: letras mayúsculas, números, figuras geométricas, etc., que trabajarán de manera manipulativa y también con representaciones gráficas (figura 197).

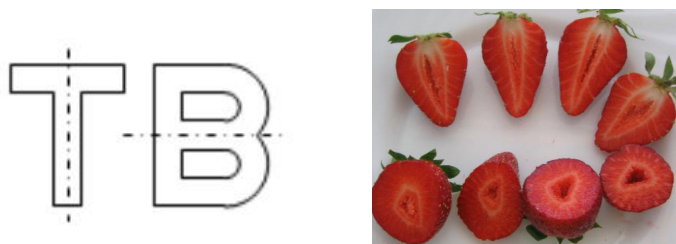


Figura 197. Representación de imágenes simétricas en objetos y figuras planas

En una figura simétrica, a partir del eje de simetría, la figura no es igual, sino que se desarrolla de igual manera a cada lado de este (véase 3.2.3.2, de este tema). Si la figura se dobla por el mencionado eje, el contorno y el interior de las dos mitades coinciden. Si las dos partes de la figura fueran iguales, al doblar no coincidirían.

Como complemento se pueden realizar actividades con un calidoscopio para que los niños y las niñas observen la simetría de las figuras que se crean en él y tam-

bién dejar caer pintura sobre un papel y doblarlo después para comprobar al desplegarlo que se ha formado una figura simétrica respecto del pliegue del papel.

Podemos trabajar con juegos de piezas en los que deban componer figuras simétricas a partir de sus mitades homólogas y con otras en los que se desarrolla la construcción de figuras simétricas utilizando algunos materiales didácticos que permiten disposiciones simétricas de piezas o fichas para formar figuras que también lo sean (figura 198).



Figura 198. Caras en Simetría (fabricado per HenBea, izquierda) y Symétricolor (fabricado por Nathan, derecha)

También podemos intentar que completen gráficamente una figura simétrica muy sencilla, dándoles la mitad de esta sobre una cuadrícula y, si es necesario, con la ayuda de un espejo, visualizar la figura completa antes de dibujarla (figura 199).

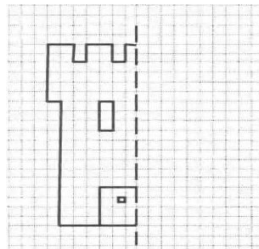


Figura 199. Representación en una cuadrícula de la mitad de una imagen simétrica

Trabajar la simetría es una tarea difícil y lo que se hace en educación infantil es solo una pequeña aproximación a las primeras ideas sobre este concepto, que se desarrolla con más extensión y profundidad en educación primaria.

16. Organizar rompecabezas, puzles, cenefas, etc.

En esta capacidad se retoman y refuerzan muchos de los aspectos topológicos y geométricos que hemos trabajado hasta ahora. Para desarrollarla se hace necesario aclarar algunos de los términos que aparecen en su enunciado.

Así, hablaremos de rompecabezas cuando las piezas que los componen tengan los bordes definidos por líneas rectas o curvas muy sencillas y de puzles cuando las

piezas tienen los bordes determinados por líneas curvas más complejas que cambian varias veces de curvatura.

Se desarrolla a lo largo de todo el 2.º ciclo y se pretende que el alumnado combine la parte geométrica con la parte artística para realizar las actividades correspondientes, que en algunos casos pretenden recubrir el plano y en otros solo una parte de este.

Empezaremos por la resolución de rompecabezas sencillos con pocas piezas y, poco a poco, aumentaremos su dificultad haciendo crecer el número de estas. Más adelante, incorporaremos el trabajo con puzzles siguiendo un proceso análogo al anterior para llegar al final de la etapa a un desarrollo bastante avanzado de las posibilidades del alumnado en este tipo de actividades.

En algunos de los materiales que se pueden utilizar para desarrollar este trabajo, se les proporciona figuras cuya forma sea una composición de diferentes formas geométricas para que traten de componerla (figura 200).

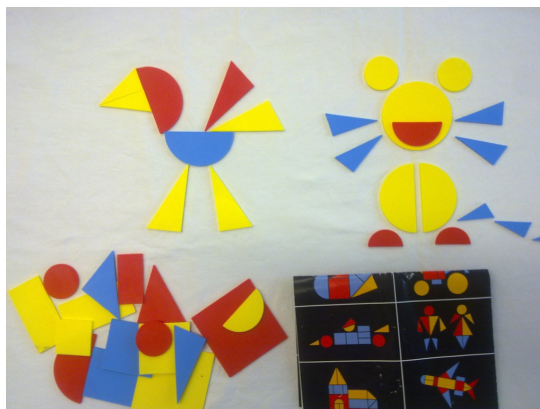


Figura 200. Mosaico múltiple (Playshapes, fabricado por Invicta Plastics Ltd.)

En esta línea de trabajo, hay un material muy conocido, el Tangram, con el que podemos potenciar la habilidad de imaginar composiciones y descomposiciones de figuras, al nivel correspondiente a la etapa de infantil, en el que se indicará siempre al alumnado los contornos de los fragmentos que componen la imagen (figura 201).

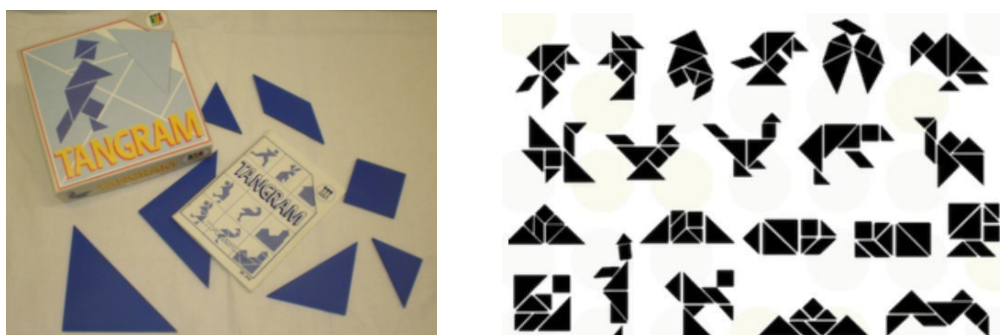


Figura 201. Tangram (fabricado por Diset, izquierda) y algunas imágenes fragmentadas para componerlas (derecha)

También se trabajará en la segunda parte del ciclo con la composición de cenefas, tanto con piezas reales como en representaciones gráficas. En este sentido, al principio se pueden realizar actividades en las que solo tengan que colorear cenefas que ya están dibujadas y, más adelante, se les pedirá que dibujen, a partir de un modelo inicial, los fragmentos que componen la cenefa además de colorearlas después (figura 202).

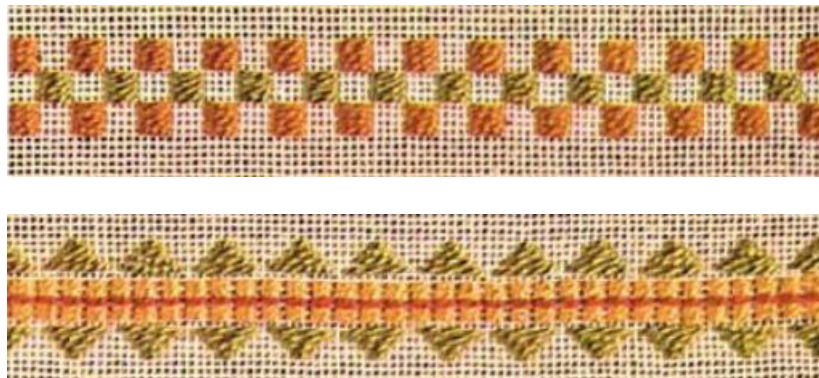


Figura 202. Representación de dos cenefas

Referencias bibliográficas

- ALSINA, A. (2004): *Com desenvolupar el pensament matemàtic*, Vic, Eumo Editorial.
- (2011a): *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*, Barcelona, ICE-Horsori.
- (2011b): *Aprender a usar les matemàtiques*, Vic, Eumo Editorial.
- ARGÜELLES, J. (1989): *Historia de la Matemática*, Torrejón de Ardoz, Madrid, Akal.
- BISHOP, A. J. (1999): *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*, Barcelona, Paidós.
- DORCE, C. (2013): *Història de la Matemàtica. Des de Mesopotàmia al Renaixement*, Barcelona, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.
- (2014): *Història de la Matemàtica. Des del segle XVII fins a l'inici de l'època contemporània*, Barcelona, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.
- GALLEGO, C. et al. (2005): *Repensar el aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas para convivir comprendiendo el mundo*, Barcelona, Graó.
- IFRAH, G. (2001): *Historia universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*, Espasa Calpe, Madrid.
- (1988): *Las cifras. Historia de una gran invención*, Madrid, Alianza Editorial.
- KOTHE, S. (1982): *Cómo utilizar los bloques de Z. P. Dienes*, Barcelona, Teide.
- PÉREZ, I.; ALCALDE, M.; LORENZO, G. (2014): *Els nombres enters i racionals, les magnituds i la mesura a l'aula de primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 96, Castelló, Publicacions de la Universitat Jaume I. <http://hdl.handle.net/10234/108098>.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. (1984): *Psicología del niño*, Madrid, Morata.
- SANTOS, C. (coord.) (1992): *Los bloques lógicos de Dienes en Educación Infantil y Primaria*, Salamanca, Amarú Ediciones.
- SEGOVIA, I.; RICO, L. (coords.) (2011): *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*, Madrid, Pirámide.
- STEWART, I. (2008): *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*, Barcelona, Crítica.
- VYGOTSKY, L. S. (1989): *Desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona, Crítica.

Bibliografía recomendada

- ALCALDE, M.; PÉREZ, I.; LORENZO, G. (2014): *Els nombres naturals a l'aula de Primària*. Col·lecció Sapientia, núm. 89. Publicacions de la Universitat Jaume I. Castelló. <http://hdl.handle.net/10234/81388>.
- ALGÁS, P. et al. (2010): *Los proyectos de trabajo en el aula. Reflexiones y experiencias prácticas*, Barcelona, Graó.
- ALSINA, C. et al. (1995): *Ensenyar matemàtiques*, Barcelona, Graó.
- BALAU, A. (2003): *Manual de matemàtiques del professor de primària*, Barcelona, Edicions de la Universitat de Barcelona.

- BERDONEAU, C. (2008): *Matemáticas activas (2-6 años)*, Barcelona, Graó.
- CALVO, X. et al. (2002). *La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula*. Claves para la innovación educativa, 17, Barcelona, Graó.
- CANALS, M. A. (2000): *Viure les matemàtiques de 3 a 6 anys*, Barcelona, Rosa Sensat.
- (2009a): *Lògica a totes les edats*, Barcelona, Rosa Sensat.
- (2009b): *Primers nombres i primeres operacions*, Barcelona, Rosa Sensat.
- (2009c): *Transformacions geomètriques*, Barcelona, Rosa Sensat.
- (2009d): *Superfícies, volums i línies*, Barcelona, Rosa Sensat.
- (2010): *Problemes i més problemes*, Barcelona, Rosa Sensat.
- CARBÓ, L.; GRÀCIA, V. (2002): *Mirant el món a través dels números*, Lleida, Pagés Editors, S. L.
- CHAMORRO, M. C. (2005): *Didáctica de las Matemáticas para la Educación Infantil*, Madrid, Pearson Prentice Hall.
- CHAMOSO, J. et al. (2013): *Las matemáticas en las primeras edades escolares*, Tres Cantos (Madrid), Nívola.
- CHEVALLARD, Y. et al. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, Barcelona, ICE Univ. Barcelona - Ed. Horsori.
- FERNÁNDEZ, J. A. (2000): *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil*, Madrid, Ediciones Pedagógicas.
- FLORES, P. et al. (2011): *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*, Granada, Universidad de Granada. http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/21964/1/libro_MATREC_2011.pdf.
- GODINO, J. (dir. i ed.) (2003-2004): *Matemáticas y su Didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros, Granada, Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.
- LORENZO, G.; ALCALDE, M.; PÉREZ, I. (2015): *La geometria i l'estadística en l'aula de Primària*, Col·lecció Sapientia, núm. 110, Castelló, Publicacions de la Universitat Jaume I. <http://hdl.handle.net/10234/108118>.
- RUESGA, M. P. (2005): *El inicio del razonamiento en la infancia*, Burgos, Editoriales Universitarias Españolas, Universidad de Burgos.
- STEEN, L. A. (ed.) (1998): *Las Matemáticas en la vida cotidiana*, Madrid, Addison-Wesley Iberoamericana - Universidad Autónoma de Madrid.

Índice de figuras

Figura 1. Representación de conjuntos: diagrama lineal (izquierda), de Venn (centro) y otro de línea cerrada (derecha)	12
Figura 2. Representación de la unión de los conjuntos A y B.....	13
Figura 3. Representación de la unión de los conjuntos C y B	14
Figura 4. Representación de la intersección de los conjuntos A y B	14
Figura 5. Imagen de los bloques lógicos de Dienes.....	15
Figura 6. Representación de una correspondencia unívoca	16
Figura 7. Representación de una correspondencia biunívoca.....	17
Figura 8. Representación de una aplicación	17
Figura 9. Representación de una aplicación biyectiva.....	17
Figura 10. Imágenes de objetos para trabajar círculos, cuadrados y triángulos.....	24
Figura 11. Imagen de un material didáctico de encajes	25
Figura 12. Representación de un ejemplo de error de contaminación.....	33
Figura 13. Representación de un conjunto determinado por una característica negativa	35
Figura 14. Representación de un conjunto de círculos y otro de los que no lo son	35
Figura 15. Representación de un ejemplo para ilustrar el error de limitación.....	38
Figura 16. Representación con cruces de la selección de los elementos de un conjunto	39
Figura 17. Representación con diagrama individual de la selección de los elementos de un conjunto	39
Figura 18. Representación con un único diagrama de los elementos de un conjunto	39
Figura 19. Representación del subconjunto de triángulos dentro de las piezas grandes de los bloques lógicos	41
Figura 20. Clasificación de algunos bloques lógicos por el color (izquierda); formación del conjunto de piezas rojas (derecha)	42
Figura 21. Clasificación de los medios de transporte por el tipo de vehículo (izquierda); formación del conjunto de aviones (derecha).....	42
Figura 22. Clasificaciones de algunas piezas de los bloques lógicos: según el color (izquierda), la forma (centro) y el grosor (derecha).....	43
Figura 23. Representación del módulo de cuatro elementos diferentes de una serie.....	44
Figura 24. Representación del módulo de cinco elementos de una serie con tres cambios de característica	45
Figura 25. Representación del módulo de seis elementos de una serie con tres cambios de característica	45
Figura 26. Representación de dos módulos, de tres elementos diferentes por una característica, de una serie.....	45
Figura 27. Representación de los cinco elementos del módulo de una serie con un cambio de una característica.....	46
Figura 28. Ritmo (fabricado por Nathan)	46

Figura 29. Representación de un módulo de ocho elementos de una serie con tres cambios de una característica	46
Figura 30. Representación de un módulo de tres elementos de una serie con dos cambios de dos características	47
Figura 31. Representación de un módulo de cinco elementos de una serie con un cambio de dos características	47
Figura 32. Pyramide 3 en 1, fabricado por Small Foot Company (izquierda) y Decreciente tractores, fabricado por Willis Toys Ltd. (derecha).....	48
Figura 33. Representación de una correspondencia entre mesas colectivas y grupos de trabajo	49
Figura 34. Representación de una correspondencia de transformación con bloques lógicos.....	50
Figura 35. Representación de una clasificación con diagramas.....	50
Figura 36. Representación de una ordenación de grande a pequeño con flechas (izquierda) y con números (derecha).....	51
Figura 37. Representación de una correspondencia que asocia parejas de animales iguales	51
Figura 38. Anillas de colores (fabricado por Goula).....	55
Figura 39. Uso de anillas de colores solo con círculos (izquierda) y con círculos y cifras (derecha)	55
Figura 40. Piezas del material Aprendo a contar (fabricado por Lado)	55
Figura 41. Secuencia de la construcción del número 6 (de izquierda a derecha)	56
Figura 42. Varillas asociadas a los números por su altura (izquierda) y uso de la varilla del 6 con piezas del 2 (derecha).....	56
Figura 43. Representación de una aplicación biyectiva entre dos conjuntos finitos	58
Figura 44. Símbolos en la escritura jeroglífica egipcia (Ifrah, 1988)	61
Figura 45. Escritura jeroglífica del número 2.425 (Ifrah, 1988).....	62
Figura 46. Representaciones numéricas en la escritura acrofónica griega (Ifrah, 1988)	63
Figura 47. Escritura acrofónica del número 7.699 (Ifrah, 1988)	63
Figura 48. Numeración alfabética griega (Ifrah, 1988)	63
Figura 49. Numeración romana	64
Figura 50. Cifras árabes (Ifrah, 1988).....	65
Figura 51. Evolución de las cifras árabes en Europa (Ifrah, 1988).....	65
Figura 52. Grabado de principios del siglo XVI que representa el triunfo de los algoritmos sobre los ábacos. Los algoristas, utilizando las 9 cifras y el cero, se imponen a los abaquistas, ya que son capaces de hacer más rápidamente las operaciones aritméticas. En segundo plano, la dama Aritmética, con un vestido adornado con cifras, muestra con la mirada cuáles son sus preferencias (Ifrah, 1988)	67
Figura 53. Representación de pocas nubes y muchas estrellas.....	75
Figura 54. Representación de animales de granja con pocas vacas y muchos caballos	76
Figura 55. Representación de una correspondencia biunívoca entre el conjunto de caballos y el de vacas	77

Figura 56. Representación de las siluetas del 1, el 2 y el 3.....	78
Figura 57. Imágenes de Egipto para contar personas (izquierda) y pirámides (derecha).....	79
Figura 58. Representación de una mesa con 5 platos y de otra con vasos y cucharas	80
Figura 59. Representación de una mesa con conjuntos equipotentes de platos, de vasos y de cucharas	80
Figura 60. Clasificación de envases para 6, 10 o 12 huevos.....	82
Figura 61. Ejemplo de material gráfico para trabajar la clasificación por el cardinal.....	83
Figura 62. Representación de un conjunto con tres cohetes espaciales y de otro con nueve planetas dibujados por el alumnado.....	84
Figura 63. Representación de cinco naranjas recortadas de un catálogo y su distribución en dos murales	91
Figura 64. Imagen de una tienda escolar	92
Figura 65. Representación del cálculo manipulativo y numérico del precio de una compra de dos productos	93
Figura 66. Representación del cálculo manipulativo y numérico del dinero que les queda después de hacer una compra	94
Figura 67. Representación de un niño en posición de balanza sopesando unas frutas	107
Figura 68. Representación de una balanza (fabricado por Osmiroid)	108
Figura 69. Representación de algunos edificios de una ciudad	109
Figura 70. Representación de vasos con diferentes cantidades de agua (los dos de la izquierda) y con la misma cantidad (los dos de la derecha)	111
Figura 71. Representación del cálculo experimental de la medida de las longitudes de una mesa y una puerta con varios pies iguales	112
Figura 72. Representación del cálculo experimental de la medida de la longitud de una mesa mediante el transporte de una sola unidad haciendo marcas	113
Figura 73. Representación del cálculo experimental de la medida de la longitud de una mesa contabilizando el transporte de una sola unidad de longitud	113
Figura 74. Representación del cálculo experimental de la medida de la capacidad de dos jarras con varios vasos iguales.....	114
Figura 75. Calendario magnético (fabricado por HenBea).....	116
Figura 76. Secuencias temporales Zaro y Nita (fabricado por Akros).....	119
Figura 77. Representación del cálculo experimental del paso del tiempo con velas: situación inicial (izquierda) y final (derecha).....	121
Figura 78. Reloj de engranajes (fabricado por Kalmarsund).....	122
Figura 79. Calendario escolar (fabricado por Akros).....	123
Figura 80. Ejemplos de transformaciones topológicas	129
Figura 81. Ejemplos de proyecciones	130
Figura 82. Ejemplos de transformaciones afines	130
Figura 83. Ejemplos de semejanzas	131
Figura 84. Ejemplos de un giro y una simetría axial en figuras planas	131
Figura 85. Representación de los ejes de coordenadas con la situación de dos puntos.....	134

Figura 86. Representación vectorial de una recta	135
Figura 87. Representación de rectas secantes en el plano	136
Figura 88. Representación de rectas paralelas no coincidentes	136
Figura 89. Representación de rectas paralelas coincidentes	136
Figura 90. Representación de rectas que se cruzan en el espacio	137
Figura 91. Representación de una circunferencia y de uno de sus radios.....	137
Figura 92. Representación de las posiciones relativas de una circunferencia y una recta en el plano	138
Figura 93. Representación de una superficie plana convexa	138
Figura 94. Representación de una superficie plana cóncava.....	139
Figura 95. Representación de una región angular.....	139
Figura 96. Representación de una línea poligonal simple	140
Figura 97. Representación de una línea poligonal no simple	140
Figura 98. Representación de un ángulo interior de un polígono	141
Figura 99. Representación de un triángulo acutángulo.....	141
Figura 100. Representación de un triángulo rectángulo	142
Figura 101. Representación de un triángulo obtusángulo.....	142
Figura 102. Representación de un triángulo equilátero	142
Figura 103. Representación de dos triángulos isósceles.....	142
Figura 104. Representación de un triángulo escaleno	143
Figura 105. Representación de un cuadrado	144
Figura 106. Representación de un rectángulo.....	144
Figura 107. Representación de un rombo	144
Figura 108. Representación de un romboide	145
Figura 109. Representación de un trapecio isósceles.....	145
Figura 110. Representación de un trapecio escaleno	145
Figura 111. Representación de un trapecio rectángulo	145
Figura 112. Representación de un trapecioide	145
Figura 113. Representación de pentágonos: regular convexo (izquierda), irregular convexo (centro) e irregular cóncavo (derecha)	147
Figura 114. Representación de un pentágulo	147
Figura 115. Representación del esbozo y del cuadro <i>Leda atómica</i> de Dalí, 1949	148
Figura 116. Representación de hexágonos: regular convexo (izquierda), irregular convexo (centro) e irregular cóncavo (derecha).....	148
Figura 117. Representación de un hexágono regular dividido en triángulos equiláteros	148
Figura 118. Representación de formas hexagonales en la naturaleza: facetas del ojo de un insecto (izquierda), colmenas de abejas (derecha)	149
Figura 119. Representación de la estructura tridimensional del carbono 60 (imagen proporcionada por www.pdm.com.co).....	149
Figura 120. Imagen de un mosaico romano en Carranque: <i>La Casa de Materno</i> (proporcionada por flickr.com)	150
Figura 121. Redes de teselas de un solo polígono: triángulo equilátero (izquierda), cuadrado (centro) y hexágono regular (derecha).....	150
Figura 122. Redes de teselas con formas de diferentes polígonos regulares	151
Figura 123. Representación de los ejes de simetría de un triángulo equilátero.....	151

Figura 124. Representación de los ejes de simetría de un cuadrado.....	152
Figura 125. Representación de dos ángulos centrales	152
Figura 126. Representación de dos sectores circulares.....	153
Figura 127. Representación de los dos segmentos circulares de un círculo determinados por la misma cuerda.....	153
Figura 128. Representación de una corona circular	153
Figura 129. Representación de dos planos secantes	154
Figura 130. Representación de dos planos paralelos no coincidentes	154
Figura 131. Representación de dos planos paralelos coincidentes	154
Figura 132. Representación de los elementos de un ángulo diedro	154
Figura 133. Representación de un ángulo poliedro	155
Figura 134. Representación de una red de triángulos equiláteros (izquierda) y una selección de seis (derecha).....	157
Figura 135. Representación de la construcción de un icosaedro regular	158
Figura 136. Representación de la construcción de un octaedro regular	158
Figura 137. Representación de la construcción de un tetraedro regular	159
Figura 138. Representación de una red de cuadrados.....	159
Figura 139. Representación de la construcción de un cubo	159
Figura 140. Representación de la construcción de un dodecaedro regular.....	160
Figura 141. Representación de prismas de diferentes bases	160
Figura 142. Representación de un prisma oblicuo	161
Figura 143. Representación del desarrollo plano de un prisma regular hexagonal (imagen proporcionada por <i>narceaeduplastica.weebly.com</i>).....	161
Figura 144. Representación de un ortoedro	162
Figura 145. Representación de una pirámide cuadrangular recta (izquierda) y de una oblicua (derecha)	162
Figura 146. Representación del desarrollo plano de una pirámide regular cuadrangular	163
Figura 147. Representación de un tronco de pirámide regular hexagonal.....	163
Figura 148. Representación de un cilindro circular recto y su desarrollo plano	164
Figura 149. Representación de un cilindro oblicuo	165
Figura 150. Representación de un cilindro elíptico	165
Figura 151. Representación de un cono circular recto y su desarrollo plano	166
Figura 152. Representación de un cono oblicuo	166
Figura 153. Representación de un tronco de cono recto y su desarrollo plano	167
Figura 154. Representación de un casquete esférico	167
Figura 155. Representación de una zona esférica	168
Figura 156. Representación de una cuña esférica	168
Figura 157. Representación de dos triángulos homólogos por una traslación	169
Figura 158. Representación de dos triángulos homólogos por un giro.....	169
Figura 159. Representación de dos triángulos homólogos por una simetría central (giro de 180°).....	170
Figura 160. Representación de dos triángulos homólogos por una simetría axial	170

Figura 161. Representación de dos composiciones de simetrías axiales: ejes paralelos (izquierda) y ejes secantes (derecha)	171
Figura 162. Representación geométrica del teorema de Tales	172
Figura 163. Representación de dos pentágonos homólogos por una homotecia de razón positiva	173
Figura 164. Representación de dos pentágonos homólogos por una homotecia de razón negativa	173
Figura 165. Representación de dos triángulos semejantes	174
Figura 166. Representación de dos prismas triangulares homólogos por una simetría especular	175
Figura 167. Representación de un sistema tridimensional de ejes	176
Figura 168. Representación de las nociones de orientación estática en el cuerpo de un niño	178
Figura 169. Taller de Topología 2 (fabricado per Nathan)	180
Figura 170. Imagen infantil nocturna de unos animales de granja	182
Figura 171. Imagen de niños delante y detrás de un árbol	182
Figura 172. Imagen de un corro de niños y niñas (izquierda) y la representación simbólica de la posición «alrededor de» (derecha)	183
Figura 173. Pistas mágicas 1 y 2 (fabricado por Nathan)	184
Figura 174. Representación de las mallas de tres geoplanos: cuadrangular (izquierda), triangular (centro) y circular (derecha)	185
Figura 175. Representación de un trayecto elaborado con elásticos en un geoplano	185
Figura 176. Representación de la reproducción de un orden lineal directo	186
Figura 177. Representación de la reproducción de un orden lineal en horizontal a otro en vertical	187
Figura 178. Representación de estrellas para reproducir un orden cíclico	187
Figura 179. Representación de una caja con indicaciones del espacio que ocupa y de un punto, una línea, y la superficie de una de sus caras	190
Figura 180. Representación de una línea cerrada (izquierda) y de una abierta (derecha)	191
Figura 181. Representación de una superficie cerrada (izquierda) y de una abierta (derecha)	191
Figura 182. Representación de una superficie toroidal	192
Figura 183. Representación de fronteras en líneas	192
Figura 184. Representación de la posición de un jugador dentro del campo de baloncesto pero fuera del área de tiro	194
Figura 185. Representación de filas rectas y curvas de niños y niñas	195
Figura 186. Representación de la vista superior de filas rectas y curvas	195
Figura 187. Representación de la vista frontal de filas rectas y curvas	195
Figura 188. Representación con huellas de un recorrido recto (izquierda) y de uno curvo (derecha)	196
Figura 189. Representación de un lápiz en posiciones vertical, oblicua y horizontal	196
Figura 190. Representación de nudos determinados por dos líneas simples (izquierda) y por una no simple (derecha)	197

Figura 191. Representación de un plano de la ciudad de Castelló con un recorrido señalado	198
Figura 192. Representación de una circunferencia y de un círculo	199
Figura 193. Figuras geométricas planas (Geometric Shapes, fabricado por NES Arnold Ltd.)	200
Figura 194. Representación del contorno de un triángulo y un cuadrado y de las figuras correspondientes.....	200
Figura 195. Figuras Geométricas en el entorno (fabricado por Akros)	202
Figura 196. Géométrix (fabricado por Nathan)	202
Figura 197. Representación de imágenes simétricas en objetos y figuras planas.....	203
Figura 198. Caras en Simetría (fabricado per HenBea, izquierda) y Symétricolor (fabricado por Nathan, derecha).....	204
Figura 199. Representación en una cuadrícula de la mitad de una imagen simétrica	204
Figura 200. Mosaico múltiple (Playshapes, fabricado por Invicta Plastics Ltd.).....	205
Figura 201. Tangram (fabricado por Diset, izquierda) y algunas imágenes fragmentadas para componerlas (derecha).....	205
Figura 202. Representación de dos cenefas	206

